
PAYSAGE SYSTOLIQUE DES SURFACES HYPERBOLIQUES DE CARACTÉRISTIQUE -1

par

Matthieu Gendulphe

Résumé. — Nous déterminons des inégalités optimales sur la systole dans le cas des surfaces hyperboliques de caractéristique d’Euler-Poincaré -1 . Dans un premier temps, nous étudions la topologie et la géométrie de ces surfaces. Nous décrivons ensuite l’action des groupes modulaires sur leurs espaces de Teichmüller. Ainsi nous pouvons décomposer des domaines fondamentaux en classes minimales, c’est-à-dire en sous-ensembles maximaux dont les points ont mêmes géodésiques réalisant la systole. Enfin, nous donnons tous les points critiques des fonctions systole et en particulier leurs maxima.

Abstract (Systolic landscape in characteristic -1). — We investigate the systole of hyperbolic surfaces with Euler-Poincaré characteristic -1 . We are mainly concerned with nonorientable surfaces. We first study their topology and geometry, then we describe the action of the mapping class group on Teichmüller spaces. Finally, we give all the systole’s critical points, which lead to the knowledge of global maxima.

Introduction

La *systole* d’une surface hyperbolique est la longueur de sa plus courte géodésique fermée non homotope à un bord. Par abus de langage, on emploie le même mot pour désigner les géodésiques réalisant cette longueur.

L’étude de la systole a une double motivation. Comme pour tout invariant métrique, on souhaite contrôler la systole en fonction de données purement topologique. La détermination d’inégalités optimales constitue, en ce sens, un problème très naturel. Mais la systole définit une fonction continue et propre sur l’espace des modules, qui se relève en une fonction de Morse topologique sur l’espace de Teichmüller. Ces bonnes propriétés en font un outil naturel pour mieux comprendre les groupes modulaires, les espaces de modules, et les espaces de Teichmüller.

Classification mathématique par sujets (2000). — 30F45, 30F60.

Mots clefs. — Surfaces hyperboliques, Systole, Surfaces non orientables, Espaces de Teichmüller, Groupes modulaires.

Le développement de méthodes variationnelles marqua une avancée importante dans ces deux directions. P. Schmutz ([Sch93]) donna une première caractérisation des maxima locaux de la systole, et l'appliqua à la recherche de maxima globaux. C. Bavard ([Bav97]) unifia au sein d'un même cadre théorique le résultat de Schmutz et ses analogues en théorie des réseaux euclidiens. Dans ce cadre, il s'avère commode de décomposer l'espace des paramètres en les classes minimales ([Bav05b]). Il s'agit des fibres de l'application qui, à un point de l'espace des paramètres, associe l'ensemble des géodésiques réalisant la systole en ce point.

Ici, nous établissons des inégalités optimales sur la systole *via* les classes minimales. Nous commençons par déterminer un domaine fondamental pour l'action du groupe modulaire. Nous le décomposons ensuite en classes minimales. Nous recherchons alors les points remarquables (points critiques, maxima locaux) à l'intérieur de chaque classe. Nous identifions ainsi le maximum global de la systole. Nous traitons le cas des surfaces de caractéristique d'Euler-Poincaré -1 , dont les espaces de Teichmüller sont de dimension suffisamment petite. Voici un extrait de nos résultats :

Théorème. — *Nous avons les inégalités optimales suivantes :*

1) *Toute surface hyperbolique fermée de caractéristique -1 satisfait*

$$\cosh(\text{sys}) \leq \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

2) *Toute bouteille de Klein hyperbolique avec un bord de longueur $b \geq 0$ satisfait*

$$\cosh(\text{sys}/4) \leq X_0,$$

où X_0 est l'unique racine supérieure à 1 de l'équation $X^3 - X = \cosh(b/4)/4$.

3) *Tout plan projectif hyperbolique avec deux bords de longueurs $b_1, b_2 \geq 0$ satisfait*

$$\cosh(\text{sys}) \leq \cosh(b_1/2) + \cosh(b_2/2) + 1.$$

4) *Tout tore hyperbolique avec un bord de longueur $b \geq 0$ satisfait*

$$\cosh(\text{sys}/2) \leq \cosh(b/6) + 1/2.$$

Une forme implicite de la dernière inégalité se trouve dans l'article [Sch93] de P. Schmutz, la forme explicite qui va avec est déjà connue des spécialistes. Les autres inégalités sont originales ; nous verrons toutefois des liens entre la première inégalité et des résultats de C. Bavard et H. Parlier (§ 13).

Notre intérêt porte principalement sur les surfaces non orientables (somme connexe de trois plans projectifs, bouteille de Klein à un bord, plan projectif à deux bords). Dans la première partie de l'article, nous étudions la géométrie et la topologie de ces surfaces *via* l'involution hyperelliptique (§ 1). Ceci permet notamment la classification des géodésiques fermées simples (§ 2). Dans la deuxième partie, nous mettons en œuvre la méthode des classes minimales décrite plus haut. Au fur et à mesure du texte, nous retrouvons plusieurs résultats déjà connus (voir § 2.1 et § 5), dont nous donnons

des preuves nouvelles. Nous concluons par quelques remarques sur la croissance des géodésiques fermées simples (§ 12).

Table des matières

Introduction.....	1
Partie I. Topologie et géométrie en caractéristique -1.....	4
1. L'involution hyperelliptique.....	4
2. Géodésiques fermées simples.....	9
3. Deux exemples de surface ₋₁	13
4. Actions par isométrie.....	14
5. Commentaires.....	16
Partie II. Paysage systolique.....	17
6. La systole comme fonction sur l'espace de Teichmüller.....	17
7. Le tore à un bord et la surface fermée de caractéristique -1.....	22
8. La bouteille de Klein à un bord et le plan projectif à deux bords	28
9. D'autres invariants de type systole.....	33
Partie III. Compléments.....	35
10. Groupes modulaires.....	35
11. Volumes de Weil-Petersson des espaces de modules.....	36
12. Croissance des géodésiques.....	36
13. Preuves alternatives de l'inégalité systolique.....	38
14. Surface de Bolza et revêtement orientable.....	39
Références.....	39

Conventions. — Les surfaces hyperboliques seront toujours supposées complètes et de volume fini. Le terme *surface₋₁* désignera une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1 . Par *géodésique* nous entendrons, sauf mention du contraire, une géodésique fermée simple. Toute courbe fermée simple sera qualifiée d'*orientable* si elle admet un voisinage transversalement orientable, de *non orientable* dans le cas contraire. L'*auto-recollement* d'un bord consistera en l'identification de ses points opposés. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous conserverons la notation d'une géodésique après opération de découpe ou d'auto-recollement. Nous confondrons les noms des géodésiques avec leurs longueurs respectives, par exemple nous écrirons $\cosh(\gamma)$ au lieu de $\cosh(\ell(\gamma))$. Enfin, rappelons qu'une surface est *fermée* si elle est compacte et sans bord.

Remerciements. — Ce travail constitue une version remaniée de la première partie de ma thèse de doctorat. Je tiens à remercier mon directeur, Christophe Bavard, qui m’a poussé à travailler sur ce sujet et m’a guidé tout au long de ma recherche.

PARTIE I

TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE EN CARACTÉRISTIQUE -1

Notre étude de la géométrie et de la topologie des surfaces de caractéristique -1 se base sur l’utilisation de l’involution hyperelliptique, que nous allons décrire en premier lieu. Nous nous intéresserons ensuite aux géodésiques et aux isométries.

Pour saisir la topologie et la géométrie des surfaces non orientables, il est commode de les concevoir comme des surfaces orientables avec des bords auto-recollés. Dans le cas qui nous intéresse, nous appuierons nos raisonnements sur deux représentations : une surface $_{-1}$ s’identifie à un tore avec un bord auto-recollé, ou à un pantalon dont les trois bords sont auto-recollés. Ce sont les seules représentations de ce type.

1. L’involution hyperelliptique

1.1. Généralités. — Les résultats de ce paragraphe sont déjà connus (voir § 5). Mais nous en donnons une présentation nouvelle, sous le point de vue de la géométrie hyperbolique. Nous renvoyons au livre [Rey89] de E. Reyssat pour une étude des involutions hyperelliptiques dans le cas classique des surfaces de Riemann.

En premier, précisons ce que nous entendons par involution hyperelliptique.

Définition 1.1. — Soit ι_X une involution d’une surface hyperbolique compacte X . On dit que ι_X est *hyperelliptique* si le quotient $X/\langle \iota_X \rangle$ est topologiquement une sphère, un plan projectif ou un disque fermé. Dans ce cas, la surface X est elle aussi qualifiée d’*hyperelliptique*.

Nous allons voir que cette définition généralise de manière satisfaisante la notion de surface de Riemann hyperelliptique.

Lemme 1.2. — *Le quotient $X/\langle \iota_X \rangle$ est une sphère si et seulement si X est orientable et fermée.*

Démonstration. — Considérons un groupe $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ uniformisant X . Le quotient $X/\langle \iota_X \rangle$ est fermé si et seulement si (Γ, ι_X) ne contient aucune réflexion, ce qui implique trivialement que Γ ne contient lui aussi aucune réflexion, donc que X est fermée. Ainsi, si le quotient $X/\langle \iota_X \rangle$ est fermé, le morphisme $X \rightarrow X/\langle \iota_X \rangle$ est un revêtement ramifié

en un ensemble discret de points. Dans ce cas, l'orientabilité de $X/\langle\iota_X\rangle$ implique l'orientabilité de X , d'où la condition nécessaire.

Supposons X orientable et fermée. Si le quotient est un disque, alors ι_X agit comme une réflexion suivant une certaine géodésique se projetant sur le bord du disque. En dehors de cette géodésique ι_X agit sans point fixe isolé car c'est une isométrie négative d'une surface hyperbolique orientable. On conclut que X est une sphère avec une métrique hyperbolique non singulière, absurde. Si le quotient est un plan projectif, alors ι_X agit comme une translation réflexion suivant une certaine géodésique, sans admettre ni point fixe isolé ni géodésique de points fixes. Ainsi X est un revêtement lisse de degré 2 du plan projectif, c'est-à-dire une sphère, absurde. \square

Lemme 1.3. — *Soit X une surface hyperbolique compacte, deux involutions de X ayant chacune au moins un point fixe isolé commutent.*

Démonstration. — Considérons deux involutions f et g ayant chacune au moins un point fixe isolé. Soit γ une géodésique passant par un point fixe isolé de f et un point fixe isolé de g . L'isométrie fg agit par translation le long de la géodésique γ , qui de ce fait est nécessairement fermée et simple ($\text{Isom}(X)$ est fini). Ainsi γ passe par exactement deux points fixes de f , et deux points fixes de g . Comme fg et $gf = (fg)^{-1}$ sont de même ordre, ces points divisent γ en quatre segments de même longueur. Ainsi fg est la translation d'ordre 2 le long de γ , et $fg = (fg)^{-1} = gf$. \square

Proposition 1.4. — *Une surface hyperbolique fermée orientable admet au plus une involution hyperelliptique, qui appartient alors au centre du groupe des isométries.*

Démonstration. — Soit X une surface hyperbolique fermée orientable de genre g . Supposons que X possèdent deux involutions hyperelliptiques distinctes ι et κ . Chacune d'elles agit avec exactement $2g+2$ points fixes isolés, conséquence directe de la formule de Riemann-Hurwitz et du lemme 1.2. Ainsi l'involution induite par κ sur le quotient $X/\langle\iota\rangle$ agit avec exactement $g+1$ points fixes isolés (ι et κ commutent). Ce qui est absurde car on trouverait $\chi(X/\langle\iota, \kappa\rangle) = (3+g)/2 > 2$.

Par unicité de l'involution hyperelliptique, on a $f\iota_X f^{-1} = \iota_X$ pour toute isométrie f , d'où ι_X appartient au centre du groupe des isométries de X . \square

Considérons une surface hyperbolique compacte X , que nous supposons à bord non vide ou non orientable. Soit $\Gamma \leq \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ un groupe uniformisant X . L'unicité du sous-groupe de Γ formé des isométries positives assure l'unicité, à isomorphisme près, d'un revêtement double singulier de X dont l'espace total est une surface hyperbolique fermée orientable.

Définition 1.5. — Nous appellerons *double fermée orientable* de X l'espace total de ce revêtement, nous le noterons \tilde{X} . L'involution correspondant à l'échange des feuilletts sera notée σ .

Le revêtement topologique sous-jacent ne dépend que de la topologie de X . Lorsque X est non orientable fermée, \hat{X} s'identifie au revêtement des orientations. Certaines références utilisent le terme *double complexe* plutôt que double fermé orientable.

Proposition 1.6. — X est hyperelliptique si et seulement si \hat{X} l'est, et dans ce cas ι_X est induite par $\iota_{\hat{X}}$

Démonstration. — Soit X une surface hyperbolique compacte non orientable ou à bord non vide. Si \hat{X} est hyperelliptique, alors l'involution $\iota_{\hat{X}}$ commute avec σ et induit une involution sur X . Le quotient de X par cette involution s'identifie à $\hat{X}/\langle \iota_{\hat{X}}, \sigma \rangle$. Pour des raisons topologiques évidentes c'est un disque ou un plan projectif, et X est hyperelliptique.

Si X est hyperelliptique, l'involution ι_X se relève en une involution positive $\iota_{\hat{X}}$. Le quotient $\hat{X}/\langle \iota_{\hat{X}} \rangle$ est une surface orientable fermée, qui admet une involution $\bar{\sigma}$ induite par σ , telle que le quotient $\hat{X}/\langle \iota_{\hat{X}}, \bar{\sigma} \rangle$ soit un disque fermé ou un plan projectif. Les arguments développés dans la deuxième partie de la preuve du lemme 1.2 montrent que $\hat{X}/\langle \iota_{\hat{X}} \rangle$ est une sphère, d'où l'hyperellipticité de \hat{X} . \square

Le diagramme commutatif suivant résume un peu la situation.

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\langle \iota_{\hat{X}} \rangle} & \mathbb{S}^2 \\ \langle \sigma \rangle \downarrow & & \downarrow \langle \bar{\sigma} \rangle \\ X & \xrightarrow{\langle \iota_X \rangle} & \mathbb{D}^2 \text{ ou } \mathbb{P}^2(\mathbf{R}) \end{array}$$

L'involution hyperelliptique possède plusieurs propriétés intéressantes.

Corollaire 1.7. — L'involution hyperelliptique ι_X est unique et appartient au centre du groupe des automorphismes.

Remarque 1.8. — En tant qu'élément du groupe modulaire (voir § 6.1), l'involution hyperelliptique est unique si et seulement si elle fixe tous les points de l'espace de Teichmüller. Ce phénomène n'a lieu que pour les surfaces de caractéristique -1 , et la surface fermée orientable de genre 2.

Corollaire 1.9. — Supposons X fermée. Alors l'involution hyperelliptique ι_X est caractérisée comme l'automorphisme ayant le plus grand nombre de points fixes isolés. Ce nombre vaut $2 + 2g$ si X est orientable, et g si X est non orientable, où g désigne le genre topologique de la surface.

Remarque 1.10. — Cette caractérisation n'est plus vraie dans le cas des surfaces à bords, l'échange de deux bords de mêmes longueurs d'un pantalon hyperbolique fournit un contre-exemple.

L'hyperellipticité est une propriété stable par auto-recollement :

Proposition 1.11. — Soit X une surface hyperelliptique à bord. Soit \bar{X} une surface obtenue par auto-recollement d'un ensemble de bords de X stable par ι_X . Alors \bar{X} est hyperelliptique, et son involution $\iota_{\bar{X}}$ est induite par ι_X .

Démonstration. — L'involution hyperelliptique peut stabiliser un bord ou l'envoyer sur un autre bord. Nous allons distinguer ces deux cas.

Soient b_1, b_2 deux bords de X échangés par ι_X , et soit \bar{X} la surface obtenue par auto-recollement de ces bords. Les bords b_1, b_2 se projettent sur un bord de $X/\langle\iota_X\rangle$, qui de ce fait est un disque fermé. L'involution ι_X induit une involution $\iota_{\bar{X}}$ de \bar{X} , et le quotient $\bar{X}/\langle\iota_{\bar{X}}\rangle$ est un plan projectif. Ainsi \bar{X} et $\iota_{\bar{X}}$ sont hyperelliptiques.

Soit b un bord stable par ι_X , et soit \bar{X} la surface obtenue par auto-recollement de ce bord. L'auto-recollement commute avec toutes les actions sur le cercle, et il s'ensuit que ι_X passe au quotient en une involution $\iota_{\bar{X}}$ de \bar{X} . Si ι_X agit sans point fixe sur b , alors b se projette sur un bord de $X/\langle\iota_X\rangle$, qui de ce fait est un disque fermé. En raisonnant comme précédemment on aboutit à la conclusion que \bar{X} et $\iota_{\bar{X}}$ sont hyperelliptiques. Si ι_X agit avec deux points fixes, alors ι_X correspond à une réflexion dont l'axe intersecte orthogonalement b en ses deux points fixes. Il vient que b se projette sur un segment du bord de $X/\langle\iota_X\rangle$, qui par suite est un disque fermé. Le fait d'auto-recoller b , implique que b ne se projette plus sur un segment du bord, mais sur un segment dont une extrémité est sur le bord du disque et l'autre un point conique d'angle π à l'intérieur du disque. Ainsi le quotient $\bar{X}/\langle\iota_{\bar{X}}\rangle$ reste un disque fermé, et on conclut que \bar{X} et $\iota_{\bar{X}}$ sont hyperelliptiques. \square

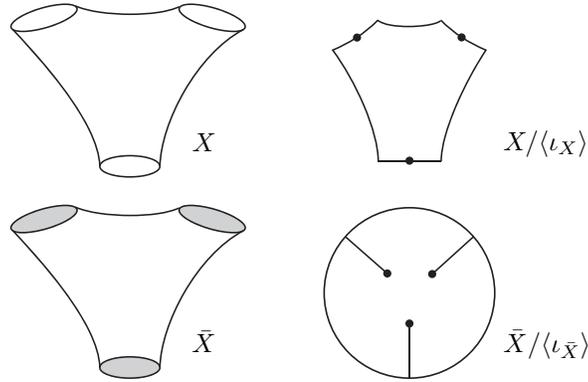


FIGURE 1. Involution hyperelliptique du pantalon et auto-recollement

Illustrons la dernière partie de la preuve en auto-recollant les bords d'un pantalon hyperbolique X . L'involution hyperelliptique ι_X consiste en la réflexion suivant les perpendiculaires communes des bords, de sorte que le quotient $X/\langle\iota_X\rangle$ s'identifie à un hexagone droit hyperbolique (topologiquement un disque fermé). L'auto-recollement

d'un bord du pantalon induit une identification sur un côté de l'hexagone $X/\langle\iota_X\rangle$, il s'agit de la symétrie suivant le milieu du côté (marqué d'un point sur la figure 1). Ainsi le quotient $\bar{X}/\langle\iota_{\bar{X}}\rangle$ est un disque avec trois singularités coniques d'angle π . Sur la figure 1, les bords du pantalon sont coloriés en gris lorsqu'ils sont auto-recollés.

1.2. Hyperellipticité en caractéristique -1 . — Étudions plus en détail le cas qui nous intéresse.

Proposition 1.12. — *Toute surface hyperbolique compacte de caractéristique -1 est hyperelliptique.*

Démonstration. — Soit X une surface hyperbolique compacte de caractéristique -1 , son double \hat{X} est une surface de Riemann de genre 2. Or on sait que toute surface de Riemann de genre 2 est hyperelliptique (voir ci-dessous), ainsi \hat{X} est hyperelliptique. On conclut par la proposition 1.6. \square

Remarque 1.13. — On trouve ce résultat sous une forme différente au § 8 de l'article [BCNS92] de E. Bujalance, A.F. Costa, S.M. Natanzon et D. Singerman.

L'involution hyperelliptique du tore à un bord possède trois points de Weierstrass. Elle agit par translation d'ordre 2 sur le bord, et stabilise chaque géodésique fermée simple, qui passe par deux points de Weierstrass. Ceci se voit en découpant une géodésique fermée simple, on obtient alors un pantalon hyperbolique avec deux bords de même longueur. Ce pantalon admet une involution échangeant ces deux bords, et passant au quotient en une involution du tore à un bord. Cette construction ne dépend pas du choix de la géodésique fermée simple puisque l'action sur le bord du tore est toujours la même.

En regardant une surface de genre 2 comme l'union de deux tores à un bord, il vient que l'involution hyperelliptique d'une surface de Riemann de genre 2 possède six points de Weierstrass. Toute géodésique fermée simple non séparante passe par deux points de Weierstrass, et toute géodésique séparante ne passe par aucun point de Weierstrass. Ainsi l'involution hyperelliptique stabilise toutes les géodésiques fermées simples, et agit par translation d'ordre 2 sur les séparantes. Ici nous avons utilisé l'unicité de l'involution hyperelliptique. Les premières preuves étaient bien différentes (A. Haas et P. Susskind [HS89]). On en déduit

Proposition 1.14. — *L'involution hyperelliptique d'une surface hyperbolique compacte de caractéristique -1 stabilise toutes les géodésiques fermées simples.*

Décrivons rapidement les involutions hyperelliptiques des autres surfaces compactes de caractéristique -1 . L'involution hyperelliptique d'un pantalon hyperbolique est la réflexion suivant les perpendiculaires communes des bords. Après auto-recollement respectivement d'un bord, de deux bords, ou de trois bords, elle passe au quotient en

l'involution hyperelliptique d'un plan projectif à deux bords, d'une bouteille de Klein à un bord, ou d'une surface fermée de caractéristique -1 .

Une surface $_{-1} X$ consiste aussi en un tore \mathbb{T}_X dont le bord est auto-recollé. Prenons deux copies de \mathbb{T}_X , et identifions leurs bords en faisant glisser l'un d'un demi-tour par rapport à l'autre (figure 2). La surface de genre 2 ainsi construite possède une involution sans point fixe σ renversant l'orientation : la translation-réflexion d'ordre deux le long du bord commun aux tores. Comme le quotient est isométrique à X , la surface de genre 2 réalise le revêtement des orientations \hat{X} . L'involution $\iota_{\hat{X}}$ commute avec σ , et passe au quotient en l'involution hyperelliptique de \mathbb{T}_X puis de X .

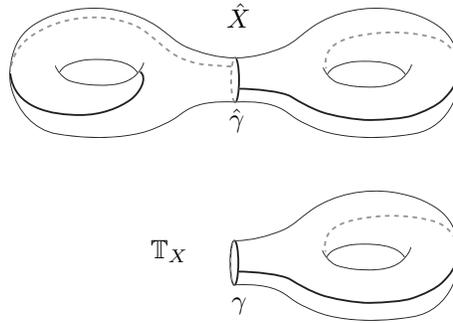


FIGURE 2. Revêtement des orientations

2. Géodésiques fermées simples

2.1. Ovale d'une surface $_{-1}$. — Le théorème ci-dessous affirme l'existence d'une classe d'isotopie de courbes canonique. Ce théorème est dû à M. Scharlemann (lemme 2.1 de [Sch82]), la démonstration ci-dessous semble toutefois plus simple. Je remercie Y. Komori pour m'avoir indiqué cet article. Le corollaire qui suit est immédiat (voir le § 6.1.1 pour une définition de *groupe modulaire*).

Théorème-Définition 2.1. — *Une surface $_{-1} X$ possède une unique géodésique dont le complémentaire est orientable. Nous l'appelons l'ovale de X et la notons γ_X .*

Corollaire 2.1. — *Le groupe modulaire de la surface fermée de caractéristique -1 est canoniquement isomorphe au groupe modulaire du tore à un bord.*

Démonstration. — Soit γ une géodésique de X dont le complémentaire est orientable. Sa découpe produit nécessairement un tore à un bord \mathbb{T}_X . Comme $\iota_{\mathbb{T}_X}$ passe au quotient en ι_X , on voit que les points fixes de ι_X sont exactement les points de γ ainsi que les points de Weierstrass de \mathbb{T}_X . En tant que lieu des points fixes non isolés de l'involution hyperelliptique, la géodésique γ est unique. \square

- Remarques 2.1.** —
1. L'ovale est une géodésique non orientable.
 2. L'ovale est la seule géodésique fermée simple dont le relevé à \hat{X} est séparant.
 3. La classe d'isotopie de l'ovale est canonique, donc stable par homéomorphisme.
 4. L'ovale est la seule géodésique fermée simple de torsion dans le premier groupe d'homologie $H_1(X; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^2 \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
 5. Soient a, b et c , trois générateurs canoniques du groupe fondamental, l'élément associé à l'ovale (à conjugaison et inverse près) est abc .
 6. La preuve ci-dessus repose sur l'unicité de l'involution hyperelliptique, nous verrons dans [Gen] une preuve purement topologique.

L'ovale γ_X d'une surface $_{-1}X$ est la seule géodésique à produire un tore à un bord par sa découpe. Nous noterons \mathbb{T}_X ce tore. L'application qui à X associe \mathbb{T}_X établit une bijection entre l'ensemble des classes d'isométrie de surfaces $_{-1}$ et l'ensemble des classes d'isométrie de tores à un bord hyperboliques.

Soit X une surface $_{-1}$, l'involution hyperelliptique de X est la réflexion suivant l'ovale, car ι_X est induite par $\iota_{\mathbb{T}_X}$. Ainsi, si X est obtenue par auto-recollement des bords d'un pantalon, alors l'ovale de X s'identifie à l'union des trois perpendiculaires communes des bords.

2.2. Classification. — Nous allons classer très simplement les géodésiques des surfaces $_{-1}$. Mais avant, soulignons un phénomène inattendu.

Lemme 2.2. — *Dans une surface fermée de caractéristique -1 , toute intersection de l'ovale avec une géodésique fermée simple s'effectue à angle droit.*

Démonstration. — Une géodésique fermée simple est stable par l'involution hyperelliptique, or cette dernière est la réflexion par rapport à l'ovale, d'où l'angle droit. \square

Proposition 2.3. — *Il y a trois types de géodésiques fermées simples dans une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1 :*

- 1) l'ovale,
- 2) les géodésiques fermées simples orientables, chacune d'elles passe par exactement deux points de Weierstrass et ne coupe pas l'ovale,
- 3) les géodésiques fermées simples non orientables distinctes de l'ovale, chacune d'elles passe par exactement un point de Weierstrass et intersecte l'ovale en un point.

Démonstration. — Soient X une surface $_{-1}$ et γ une géodésique distincte de l'ovale. Commençons par montrer que γ intersecte au plus une fois γ_X . Supposons que γ coupe γ_X en au moins deux points. Vu dans le tore \mathbb{T}_X , γ possède plusieurs composantes connexes, la parité de leur nombre décidant de son orientabilité. Considérons une composante connexe γ_0 de γ , ou bien γ_0 est stable par l'involution, ou bien elle est envoyée sur une autre composante connexe. Si elle est stable, alors les points

d'intersection de γ_0 avec $\partial\mathbb{T}_X$ sont diamétralement opposés et donc identifiés dans X ; donc γ_0 est une géodésique simple fermée et $\gamma = \gamma_0$, absurde. Si elle est envoyée sur une autre composante connexe γ_1 , alors les extrémités de γ_1 sont les points du bord diamétralement opposés aux extrémités de γ_0 . Il vient que $\gamma_0 \cup \gamma_1$ forme une seule et même géodésique, donc $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$. Nous concluons qu'une géodésique de X a au plus deux points d'intersection avec l'ovale.

Supposons que γ coupe γ_X en exactement deux points, alors γ est orientable. Par ailleurs, γ ne passe par aucun point de Weierstrass puisque ses composantes γ_1 et γ_2 sont échangées par l'involution hyperelliptique. Donc γ se relève en une géodésique séparante, c'est absurde (seule γ_X se relève en une géodésique séparante). D'où γ ne peut couper γ_X en deux points.

Supposons que γ coupe γ_X en un point, alors γ est non orientable. Comme l'involution hyperelliptique fixe le point d'intersection elle en fixe nécessairement un autre. Donc γ passe par un point de Weierstrass.

Supposons que γ n'intersecte pas γ_X , alors γ est une géodésique interne de \mathbb{T}_X , elle est donc orientable et passe par deux points de Weierstrass. \square

2.3. Dualité. — Étant donnée une géodésique fermée simple orientable γ d'une surface ${}_{-1}X$, il existe une unique géodésique fermée simple non orientable γ' disjointe de γ . En effet, en découpant γ dans \mathbb{T}_X on obtient un pantalon avec deux bords de même longueur, il existe un unique arc géodésique simple du pantalon reliant deux points de $\partial\mathbb{T}_X$ et orthogonal à ce bord en ces extrémités (voir figure 3).

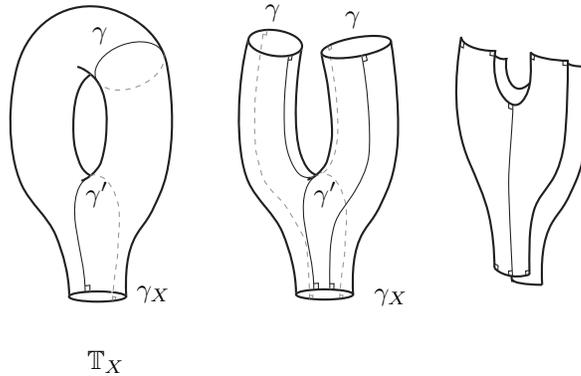


FIGURE 3. Géodésique duale

Proposition-Définition 2.1. — *L'application décrite ci-dessus établit une bijection entre les géodésiques fermées simples orientables et les géodésiques fermées simples non orientables distinctes de l'ovale. Soit γ une géodésique fermée simple distincte*

de l'ovale, nous noterons γ' la géodésique lui correspondant par cette application, et l'appellerons géodésique duale de γ .

Démonstration. — Prouvons la surjectivité. Soit γ une géodésique non orientable de X . En découpant γ dans \mathbb{T}_X , nous obtenons un cylindre. À homotopie libre près, celui-ci ne contient qu'une seule courbe fermée simple. \square

Remarque 2.4. — La dualité est croissante pour les longueurs. En effet, entre une géodésique orientable γ , sa duale γ' , et l'ovale γ_X , nous avons la relation

$$\cosh(\gamma/2) = \sinh(\gamma'/2) \sinh(\gamma_X/2).$$

En particulier, la géodésique duale d'une systole de \mathbb{T}_X est de longueur minimale parmi les géodésiques non orientable de X distincte de γ_X . Une telle géodésique réalise le rayon d'injectivité de γ_X . Nous appellerons *rayon extrémaux* les géodésiques duales des systoles de \mathbb{T}_X .

2.4. La bouteille de Klein à un bord, le plan projectif à deux bords. —

La bouteille de Klein à un bord s'obtient par auto-recollement de deux bords d'un pantalon, ou par découpe d'une géodésique non orientable d'une surface $_{-1}$.

Proposition 2.5. — *Une bouteille de Klein à un bord hyperbolique admet une seule géodésique fermée simple orientable. Ses géodésiques fermées simples non orientables forment une seule orbite sous l'action du twist de Dehn selon la géodésique orientable.*

Démonstration. — Regardons la bouteille de Klein comme le complémentaire d'une géodésique non orientable γ dans une surface $_{-1}$. L'unicité de la géodésique orientable vient de l'unicité de la duale d'une géodésique non orientable dans une surface $_{-1}$. Les géodésiques non orientables de la bouteille de Klein à un bord sont en bijection avec les géodésiques non orientables de la surface $_{-1}$ disjointes de γ . En découpant γ et l'ovale de la surface $_{-1}$ nous obtenons un cylindre. Les géodésiques non orientables disjointes de γ sont en bijection avec les classes d'isotopie de courbes reliant les deux bords du cylindre. \square

Proposition 2.6. — *Un plan projectif à deux bords hyperbolique n'admet aucune géodésique fermée simple orientable, et seulement deux géodésiques fermées simples non orientables.*

Démonstration. — Une géodésique orientable serait duale de chacun des bords, c'est impossible. Si le plan projectif est obtenu par auto-recollement d'un bord d'un pantalon, alors le bord auto-recollé s'identifie à une géodésique du plan projectif. Cherchons les autres géodésiques non orientables. Elles sont orthogonales à l'ovale et l'intersectent en un seul point, de plus elles passent obligatoirement par les point de Weierstrass du plan projectif. Nous voyons rapidement qu'il n'y a qu'une possibilité. \square

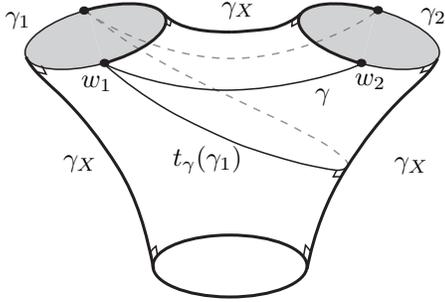


FIGURE 4. Bouteille de Klein à bord

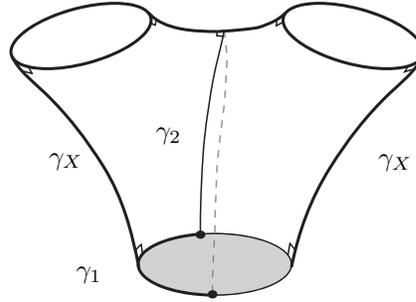


FIGURE 5. $\mathbb{P}^2(\mathbf{R})$ à deux bords

Les bords grisés dans les figures 4 et 5 représentent les bords auto-recollés. Sur la figure 5 nous avons noté γ_1 et γ_2 les deux géodésiques du plan projectif à deux bords. Sur la figure 4 nous avons noté γ la géodésique orientable et γ_1, γ_2 deux géodésiques non orientables ; le t_γ désigne le twist selon γ .

3. Deux exemples de surface $_{-1}$

Nous construisons un tore équilatéral à un bord en identifiant les côtés opposés d'un hexagone régulier troué, d'angle au sommet $2\pi/3$ (figure 6). Cet hexagone est l'union de 6 pentagones avec 4 angles droits et un angle de $2\pi/3$. Chaque pentagone se décompose en deux trirectangles avec un angle de $\pi/3$. Nous pouvons imposer que la distance du bord aux côtés de l'hexagone soit le quart de la longueur du bord. Nous noterons \mathbb{T}_{X_H} le tore ainsi obtenu et X_H la surface $_{-1}$ s'en déduisant.

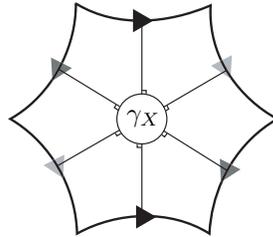


FIGURE 6. Construction du tore équilatéral

Les points de Weierstrass de X_H sont les milieux des côtés de l'hexagone. Nous avons représenté les perpendiculaires communes du bord et des côtés, elles forment

trois rayons extrémaux. Les segments joignant les milieux des côtés constituent les systoles de \mathbb{T}_{X_H} puisque ce sont les duales des rayons extrémaux. Il est facile de voir que la longueur des rayons extrémaux est plus petite que la longueur des systoles de \mathbb{T}_{X_H} , et nous en déduisons que X_H possède exactement quatre systoles : trois rayons extrémaux et l'ovale. En travaillant dans un des 12 trirectangles nous trouvons $\sinh(\text{sys}(X_H)/2) \sinh(\text{sys}(X_H)/6) = \cos \pi/3$, soit $\sinh(\text{sys}(X_H)/3) = (1 + \sqrt{17})/4$ et $\cosh(\text{sys}(X_H)) = (5 + \sqrt{17})/2$.

Une deuxième surface intéressante provient du pentagone droit régulier. Collons deux tels pentagones suivant un côté nous obtenons un hexagone droit. À partir de deux hexagones nous fabriquons un pantalon, puis en recollant deux bords de ce pantalon avec un twist nul nous parvenons à une surface₋₁ notée X_P (nous effectuons la démarche inverse de celle de la figure 3).

Cette surface possède cinq systole : l'ovale, deux systoles orientables et deux rayons extrémaux. En fait, il y a une systole par côté du pentagone. Il est très facile de voir que ces géodésiques sont bien les systoles, et les points de Weierstrass correspondent aux sommets du pentagone qui ne sont pas sur l'ovale. Nous trouvons que la systole est donnée par $\cosh(\text{sys}(X_P)) = 2 + \sqrt{5}$.

4. Actions par isométrie

Dans ce paragraphe, nous déterminons toutes les actions par isométrie sur les tores à un bord hyperboliques. Cela donne toutes les actions par isométrie sur les surfaces₋₁. Signalons que les groupes d'isométries des tores à un bord hyperboliques sont connus depuis bien longtemps, puisqu'il s'agit (à isomorphismes près) des sous-groupes finis de $\text{GL}(2, \mathbf{Z})$ (vu comme le groupe modulaire du tore). Cependant, ce qui nous intéresse ici c'est véritablement l'action du groupe d'isométrie sur la surface.

Procédons d'abord à quelques remarques générales. Soit $\text{Isom}(\mathbb{T})$ le groupes des isométries d'un tore à un bord hyperbolique \mathbb{T} , ce groupe agit par isométrie sur le bord $\partial\mathbb{T}$, en particulier $\text{Isom}(\mathbb{T})$ est ou bien cyclique ou bien dihédral. De plus, l'action sur le bord détermine complètement une isométrie de \mathbb{T} , ainsi toutes les isométries négatives sont des involutions. D'autre part, $\text{Isom}^+(\mathbb{T})$ agit aussi sur l'ensemble des points de Weierstass, mais seule l'involution hyperelliptique $\iota_{\mathbb{T}}$ fixe tous les points de Weierstass (Corollaire 1.9). Par conséquent $\text{Isom}^+(\mathbb{T})$ est une extension centrale d'un sous-groupe de Sym_3 par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, cela implique notamment qu'une isométrie positive d'un tore à un bord hyperbolique est d'ordre 2, 3, 4 ou 6.

4.1. Involutions. — En regardant l'action sur le bord, on observe qu'il y a une seule involution positive : l'involution hyperelliptique. Intéressons-nous maintenant aux involutions négatives. Une involution négative fixe deux points du bord, ces deux points sont reliés par un segment géodésique δ orthogonal au bord en ses extrémités, et fixé point-à-point par l'involution. Découpons la géodésique duale δ' de ce segment,

la réflexion suivant δ se réalise comme isométrie du tore si et seulement si le coefficient de twist selon δ' vaut 0 ou $1/2$ (regarder l'action sur les points de Weierstrass). Nous dirons que l'involution est de type 1 si le coefficient de twist est nul, et de type 2 s'il vaut $1/2$. Seules les involutions de type 1 admettent une géodésique de points fixes.

Dans le pantalon obtenu par découpe de δ' , l'ensemble des perpendiculaires communes aux bords du pantalon est stable par la réflexion suivant δ . La réflexion suivant ces perpendiculaires communes forme une nouvelle involution négative, du même type que la précédente, et l'involution hyperelliptique correspond au produit de ces deux involutions. Le groupe engendré par ces involutions est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Pour chaque type d'involution négative, nous avons représenté les lieux de points fixes des éléments du groupe engendré par l'involution négative et $\iota_{\mathbb{T}}$ figures 7 et 8.

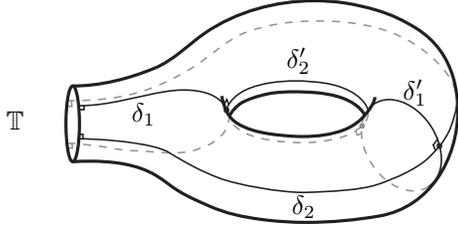


FIGURE 7. Type 1

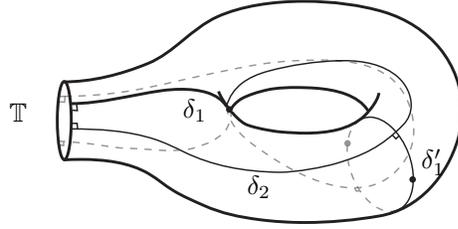


FIGURE 8. Type 2

4.2. Action de D_4 . — Supposons l'existence d'un élément σ d'ordre 4 dans $\text{Isom}^+(\mathbb{T})$. Cet élément fixe nécessairement un point de Weierstrass w_1 , et échange les deux autres. Il ne stabilise aucune géodésique fermée simple, car dans le cas contraire σ^2 fixerait point-à-point une géodésique, et cela impliquerait $\sigma^2 = id_{\mathbb{T}}$. Par conséquent les systoles de \mathbb{T} passent toutes par w_1 , car deux systoles d'un tore à un bord ne s'intersectent pas en deux points. Donc \mathbb{T} a exactement deux systoles, s'intersectant en w_1 , et image l'une de l'autre par σ .

Découpons une des systoles, nous obtenons un pantalon hyperbolique. Comme les systoles sont orthogonales (σ fixe w_1 et est d'ordre 4), la trace de la deuxième systole sur le pantalon correspond à la perpendiculaire commune aux deux bords provenant de la première systole. Ainsi, les tores hyperboliques à un bord admettant une isométrie positive d'ordre 4 sont exactement ceux construits de la façon suivante : nous partons d'un pentagone droit $(abcde)$ vérifiant $a = e$ (et $b = d$), avec 4 pentagones isométriques à $(abcde)$ nous formons un pantalon, en recollant les deux bords de longueur $2a$ avec un coefficient de twist nul nous obtenons \mathbb{T} . On remarque qu'à longueur de bord fixé, il existe un unique tore construit de cette façon, et son groupe d'isométrie est D_4 . Ce groupe d'isométrie contient deux sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, l'un formé d'involutions de type 1, l'autre formé d'involutions de type 2.

4.3. Action de D_6 . — Supposons l'existence d'un élément d'ordre 3 dans $\text{Isom}^+(\mathbb{T})$. Le produit de cette isométrie avec $\iota_{\mathbb{T}}$ donne une nouvelle isométrie σ d'ordre 6. Cette dernière agit comme un cycle d'ordre 3 sur les points de Weierstrass, en particulier le tore \mathbb{T} a exactement 3 systoles. Ainsi, à longueur de bord fixée, seul le tore équilatéral admet isométrie positive d'ordre 3 (ou 6), son groupe d'isométrie est D_6 . Ce groupe d'isométrie contient trois sous-groupes isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, tous formés d'involutions de type 2.

5. Commentaires

Dans notre approche des surfaces non orientables nous avons adopté un point de vue hyperbolique. Un point de vue plus classique serait celui des *surfaces de Klein*, c'est-à-dire des surfaces munies d'un atlas dont les changements de cartes sont holomorphes ou anti-holomorphes. L'étude des surfaces de Klein a connu un certain développement depuis l'impulsion donnée par la monographie [AG71] de N. Alling et N. Greenleaf au début des années 70. Dans ce cadre, l'involution hyperelliptique est souvent définie comme une involution σ d'une surface de Klein X telle que le quotient $X/\langle\sigma\rangle$ soit de genre algébrique 0. Le *genre algébrique* correspond à la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes (voir [AG71] p. 110), en référence au cas classique des surfaces de Riemann où le théorème de Riemann-Roch donne justement une égalité entre genre topologique et dimension de l'espace des 1-formes holomorphes. Notons qu'il y a une équivalence entre la catégorie des surfaces de Klein compactes et la catégorie des courbes algébriques réelles, nous renvoyons à [AG71] p. 102 et à l'appendice de [BEGG90] pour plus de précisions.

On trouve une étude (caractérisation, unicité) de l'involution hyperelliptique dans l'article [BEG85] de J.A. Bujalance dans le cas des surfaces de Klein sans bord, et dans l'article [Buj89] de E. Bujalance, J.J. Etayo, J.M. Gamboa dans le cas des surfaces de Klein à bord. Les groupes d'automorphismes des surfaces hyperelliptiques sont relativement bien connus, on peut consulter l'article [BBGM89] de E. Bujalance, J.A. Bujalance, G. Gromadzki et E. Martinez dans les cas sans bord, et la monographie [BEGG90] de E. Bujalance, J.J. Etayo, J.M. Gamboa et G. Gromadzki dans le cas à bord. Enfin, comme nous l'avons remarqué, notre description des involutions hyperelliptiques en caractéristique -1 est en partie contenue dans la classification topologique des involutions menée par E. Bujalance, A.F. Costa, S.M. Natanzon et D. Singerman dans [BCNS92]. Ces résultats reposent sur la classification des groupes cristallographiques non euclidiens du plan établie notamment par A.M. Macbeath et H.C. Wilkie. Cette classification est équivalente à celle des orbisurfaces hyperboliques (qui sont géométriques), bien connue depuis les travaux de W.P. Thurston (voir [Thu] chap. 13).

PARTIE II

PAYSAGE SYSTOLIQUE

6. La systole comme fonction sur l'espace de Teichmüller

Ici Σ désigne une surface compacte de caractéristique d'Euler-Poincaré négative. Lorsque Σ est non orientable ou à bord non vide, on note $\hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ son revêtement double fermé orientable, et $\sigma : \hat{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$ l'automorphisme de ce revêtement.

Pour simplifier, nous supposons que Σ n'est pas un pantalon. Ce cas présente peu d'intérêt puisque l'espace de Teichmüller d'un pantalon est réduit à un point. Par ailleurs, on montre facilement que si X est une surface hyperbolique compacte distincte d'un pantalon, alors les géodésiques réalisant la systole de X sont simples.

6.1. Espaces de Teichmüller et groupes modulaires. —

6.1.1. Définitions. — Nous rappelons ici quelques définitions et faits classiques. Nous ne donnons aucune preuve, mais nous verrons au paragraphe suivant comment se ramener simplement au cas habituel des surfaces fermées orientables.

L'espace de Teichmüller $\text{Teich}(\Sigma)$ est l'espace des classes d'isotopie de métriques hyperboliques sur Σ . C'est une variété lisse de dimension finie difféomorphe à une boule ouverte. Le groupe $\text{Mod}(\Sigma)$ des classes d'isotopie de difféomorphismes s'appelle la *groupe modulaire*. Il agit proprement et discontinuement par difféomorphismes sur l'espace de Teichmüller. L'orbivariété quotient $\text{Mod}(\Sigma) \backslash \text{Teich}(\Sigma)$ s'identifie à l'espace des modules des classes d'isométrie de métriques hyperboliques sur Σ . Lorsque la surface est à bord non vide, on suppose implicitement fixées les longueurs des bords, et on ne considère que les difféomorphismes stabilisant chaque bord.

Soit $\mathcal{S}(\Sigma)$ l'ensemble des classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles (*i.e.* ne bordant ni un disque, ni un anneau, ni un ruban de Möbius) de Σ . On appelle *décomposition en pantalons* un système maximal \mathcal{P} d'éléments deux-à-deux disjoints de $\mathcal{S}(\Sigma)$. La famille des fonctions twist et longueur associées aux éléments de \mathcal{P} définit une carte globale de $\text{Teich}(\Sigma)$. À chaque élément γ de \mathcal{P} est canoniquement associé une fonction longueur $\ell_\gamma : \text{Teich}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$. À chaque élément orientable γ de \mathcal{P} on peut associer une fonction de twist $\theta_\gamma : \text{Teich}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{R}$ dont nous allons rappeler la définition. On choisit d'abord une orientation d'un voisinage annulaire de γ , puis on choisit une perpendiculaire commune issue de γ dans chaque pantalon adjacent à γ (ces pantalons sont éventuellement les mêmes); on note alors τ_γ la distance orientée sur γ entre le pied de la perpendiculaire à gauche de γ et le pied de la perpendiculaire à droite de γ (ceci ne dépend pas d'une orientation de γ). La fonction $\tau_\gamma / \ell_\gamma : \text{Teich}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{S}^1 := \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est bien définie et lisse. La fonction de twist $\theta_\gamma : \text{Teich}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction univaluée au-dessus de $\tau_\gamma / \ell_\gamma$. La définition des fonctions twist varie suivant les auteurs, à un facteur 2π près nous suivons celle de

[IT92] § 3.2. Enfin, par opposition à fonction de twist, nous appelons *coefficient de twist* la fonction $\theta_\gamma = \tau_\gamma/\ell_\gamma$ à valeurs dans \mathbb{S}^1 . Nous employons la même notation pour les deux.

6.1.2. *Plongements.* — La littérature ne traite en général que des espaces de Teichmüller des surfaces de Riemann. Quelques auteurs se sont néanmoins intéressés aux autres cas, par exemple C.J. Earle, J. Eells et A. Schatz dans [EE69, ES70]. Un raccourci rapide consiste à fixer une réalisation du revêtement double fermé orientable, puis à plonger $\text{Teich}(\Sigma)$ dans $\text{Teich}(\hat{\Sigma})$ en l'identifiant à un sous-ensemble du lieu des points fixes de $[\sigma] \in \text{Mod}(\hat{\Sigma})$.

Lemme 6.1. — *Deux difféomorphismes de Σ sont isotopes si et seulement si leurs relevés à $\hat{\Sigma}$ le sont.*

Démonstration. — Soit f un difféomorphisme de Σ . Nous allons montrer que f est isotope à id_Σ si et seulement si son relevé est isotope à $id_{\hat{\Sigma}}$. L'implication directe vient de la propriété de relèvement des homotopies. Supposons maintenant \hat{f} et $id_{\hat{\Sigma}}$ isotopes, nous allons montrer que f et id_Σ sont isotopes.

Quitte à effectuer une isotopie, nous supposons que f fixe un point p et que \hat{f} fixe un relevé \hat{p} . Par des résultats classiques de topologie des surfaces (voir [FM12] § 1.4), il suffit de montrer que f_* est l'identité de $\pi_1(\Sigma, p)$. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\hat{\Sigma}, \hat{p}) & \xrightarrow{\hat{f}_*} & \pi_1(\hat{\Sigma}, \hat{p}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\Sigma, p) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\Sigma, p) \end{array}$$

montre que la restriction de f_* au sous-groupes des éléments orientables de $\pi_1(\Sigma, p)$ est l'identité. Nous concluons en remarquant que tout élément orientable de $\pi_1(\Sigma, p)$ admet au plus une racine carrée dans $\pi_1(\Sigma, p)$ (fait évident si l'on travaille avec une représentation fidèle de $\pi_1(\Sigma, p)$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$). \square

Proposition 6.2. — *Soit Σ une surface non orientable ou à bord non vide. Dans le diagramme commutatif suivant, les flèches horizontales sont induites par le relèvement d'une métrique hyperbolique au double fermé orientable, ces flèches représentent des plongements topologiques*

$$\begin{array}{ccc} [m] \in \text{Teich}(\Sigma) & \longrightarrow & [\hat{m}] \in \text{Teich}(\hat{\Sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Mod}(\Sigma) \backslash \text{Teich}(\Sigma) & \longrightarrow & \text{Mod}(\hat{\Sigma}) \backslash \text{Teich}(\hat{\Sigma}) \end{array} .$$

Démonstration. — Regardons d'abord la flèche entre les espaces de Teichmüller. Les applications $m \mapsto \hat{m}$ et $\hat{m} \mapsto m$ sont continues. Il s'agit donc de montrer que $[m] \mapsto [\hat{m}]$ est bien définie et injective. C'est exactement ce que dit le lemme précédent.

Montrons l'injectivité de la flèche entre les espaces de modules. Soient m et n deux métriques sur Σ telles qu'il existe une isométrie $f : \hat{m} \rightarrow \hat{n}$ entre leurs relevés. Le groupe des isométries d'une surface hyperbolique étant fini, le groupe $\langle \sigma, f^{-1}\sigma f \rangle$ est isomorphe à un groupe diédral ou cyclique. Ainsi σ et $f^{-1}\sigma f$ sont conjuguées par une isométrie g de \hat{m} . Finalement nous avons $\sigma = (fg)^{-1}\sigma(fg)$, ce qui signifie que fg est équivariante par rapport à σ , et induit une isométrie entre m et n . \square

Remarque 6.3. — La flèche entre les espaces de modules est canonique, celle entre les espaces de Teichmüller ne l'est pas car elle dépend du choix du revêtement double fermé orientable. Changer de revêtement équivaut à conjuguer l'automorphisme σ par un difféomorphisme. Le plongement ci-dessus est donc unique à conjugaison près par un élément de $\text{Mod}(\hat{\Sigma})$.

L'image de $\text{Teich}(\Sigma)$ dans $\text{Teich}(\hat{\Sigma})$ coïncide avec l'ensemble des points fixes de $[\sigma] \in \text{Mod}(\hat{\Sigma})$ vérifiant les conditions de longueur associées aux bords de Σ . On montre facilement que l'image de $\text{Teich}(\Sigma)$ dans $\text{Teich}(\hat{\Sigma})$ est une sous-variété. Cette sous-variété n'est pas canonique, mais la structure différentielle induite sur $\text{Teich}(\Sigma)$ l'est.

Lorsque Σ est à bord non vide, l'image de $\text{Teich}(\Sigma)$ dans $\text{Teich}(\hat{\Sigma})$ est $\text{Fix}(\sigma)$. Ceci peut s'avérer utile, car les espaces de Teichmüller des surfaces de Riemann admettent une métrique de courbure négative, dite de Weil-Petersson, pour laquelle le groupe modulaire coïncide avec le groupe des isométries (H. Masur et M. Wolf [MW02]). Ainsi $\text{Teich}(\Sigma)$ s'identifie à la sous-variété totalement géodésique $\text{Fix}(\sigma)$ de $\text{Teich}(\hat{\Sigma})$. Lorsqu'il y a un bord de longueur fixée, l'image de $\text{Teich}(\Sigma)$ dans $\text{Teich}(\hat{\Sigma})$ n'est plus une sous-variété totalement géodésique en raison de la stricte convexité des fonctions longueur de géodésique relativement à la métrique de Weil-Petersson.

Concernant les groupes modulaires, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \varphi \in \text{Diff}(\Sigma) & \longrightarrow & \hat{\varphi} \in \langle \psi ; \psi\sigma = \sigma\psi \rangle & \leq & \text{Diff}^+(\hat{\Sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\varphi] \in \text{Mod}(\Sigma) & \longrightarrow & [\hat{\varphi}] \in \langle [\psi] ; [\psi\sigma] = [\sigma\psi] \rangle & \leq & \text{Mod}^+(\hat{\Sigma}) \end{array}$$

Les flèches horizontales représentent des homomorphismes injectifs. Ils induisent un isomorphisme entre $\text{Mod}(\Sigma)$ et le sous-groupe de $\text{Mod}^+(\hat{\Sigma})$ formé des éléments qui commutent avec $[\sigma]$ et fixent les éléments de $\mathcal{S}(\hat{\Sigma})$ au-dessus des bords de Σ . Si Σ est sans bord, alors $\text{Mod}(\Sigma)$ est isomorphe au commutant de $[\sigma]$ dans $\text{Mod}^+(\Sigma)$.

Ce plongement de $\text{Mod}(\Sigma)$ dans $\text{Mod}(\hat{\Sigma})$ est unique à conjugaison près par un élément de $\text{Mod}(\hat{\Sigma})$. L'involution hyperelliptique, comme nous l'avons déjà signalé, n'est pas unique en tant qu'élément de $\text{Mod}(\hat{\Sigma})$ (sauf en genre 2). Mais on montre facilement que les involutions hyperelliptiques forment une seule orbite sous l'action par conjugaison de $\text{Mod}(\hat{\Sigma})$ (voir [FM12] § 7.4). Ceci est en général faux pour les involutions hyperelliptiques de Σ . Les relevés de deux involutions hyperelliptiques de Σ seront conjugués par un élément de $\text{Mod}(\hat{\Sigma})$, mais cet élément n'a aucune raison

pour commuter avec $[\sigma]$. On construit facilement deux involutions hyperelliptiques en genre 4 non orientable, telles que le quotient de l'une est topologiquement un disque et le quotient de l'autre un plan projectif.

6.2. La fonction systole. — La *systole* d'une surface hyperbolique compacte est la longueur de sa plus courte géodésique non homotope à un bord. Elle définit une fonction continue sur $\text{Teich}(\Sigma)$ invariante sous l'action du groupe modulaire :

$$\text{sys} = \inf_{\gamma \in \mathcal{S}(\Sigma)} \ell_\gamma.$$

D'après le critère de compacité de C. Chabauty et D. Mumford ([**Cha50**, **Mum71**]) la systole admet un maximum global. La preuve de D. Mumford ne concerne que le cas des surfaces fermées orientables. *Via* le plongement décrit ci-dessus, on étend facilement son résultat aux autres surfaces compactes (lorsque Σ est à bord non vide on utilise le lemme du collier). L'existence de la constante de Bers justifie aussi ce critère de compacité (on trouve cet argument dans [**FM12**]).

Notation. — On note $\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{S}(\Sigma)$ le sous-ensemble correspondant aux géodésiques réalisant la systole d'un point X de $\text{Teich}(\Sigma)$.

6.2.1. Propriétés de convexité des fonctions longueur. — Les résultats de C. Bavard et H. Akrouit dont nous nous servons nécessitent l'hypothèse de convexité suivante :

Lemme 6.4. — *Tout point X de l'espace de Teichmüller admet un voisinage muni d'une métrique riemannienne pour laquelle les hessiens des fonctions longueur $(\ell_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}(X)}$ sont définis positifs.*

Si Σ est fermée, l'hypothèse se trouve vérifiée car les hessiens des fonctions longueur sont définis positifs pour la métrique de Weil-Petersson (S. Wolpert [**Wol87**]). Cet argument ne marche plus dans le cas à bord. Dans le cas général, on applique le théorème suivant de M. Bestvina, K. Bromberg, K. Fujiwara et J. Souto ([**BBFS09**]) :

Théorème. — *Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}(\Sigma)$ une décomposition en pantalons de Σ , et soit γ une géodésique de Σ . Alors la fonction longueur ℓ_γ est convexe en des coordonnées Fenchel-Nielsen généralisées associées à \mathcal{P} , et même strictement convexe si γ intersecte chaque composante de \mathcal{P} .*

On appelle *coordonnées Fenchel-Nielsen généralisées* (plus simplement *coordonnées Fenchel-Nielsen* dans [**BBFS09**] § 4) toute trivialisations du fibré $\mathbf{R}^{|\mathcal{P}^+|}$ -principal

$$\begin{aligned} \ell_{\mathcal{P}} : \text{Teich}(\Sigma) &\longrightarrow (\mathbf{R}_+^*)^{|\mathcal{P}|} \\ X &\longmapsto (\ell_\gamma(X))_{\gamma \in \mathcal{P}} \end{aligned} .$$

La structure de fibré $\mathbf{R}^{|\mathcal{P}^+|}$ -principal vient de l'action de $\mathbf{R}^{|\mathcal{P}^+|}$ sur $\text{Teich}(X)$ par le twist le long des géodésiques orientables de la décomposition. On note \mathcal{P}^+ le sous-ensemble formé des géodésiques orientables de \mathcal{P} , et de la même façon on note $\mathcal{S}^+(\Sigma)$ le sous-ensemble formé des géodésiques orientables de $\mathcal{S}(\Sigma)$.

Preuve du lemme. — Nous supposons $\chi(\Sigma) < -1$, nous laissons au lecteur le soin de traiter le cas $\chi(\Sigma) = -1$. Sous cette hypothèse, le fait suivant est vérifié : *étant données deux géodésiques fermées simples disjointes, il existe une géodésique fermée simple orientable intersectant ces deux géodésiques.* On montre facilement cette propriété en construisant la géodésique à la main. Nous en déduisons que *pour tout sous-ensemble fini $S \subset \mathcal{S}(\Sigma)$ il existe une géodésique fermée simple orientable $\gamma \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ intersectant tous les éléments de S .* On procède par induction sur le cardinal de S . Soit S un sous-ensemble fini de $\mathcal{S}(\Sigma)$, et soit $\gamma \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ intersectant tous les éléments de S . Considérons une géodésique $\delta \in \mathcal{S}(\Sigma)$ disjointe de γ . Prenons alors une géodésique fermée simple orientable α intersectant γ et δ . Pour n suffisamment grand $t_\alpha(\gamma)$ intersecte tous les éléments de $S \cup \{\delta\}$.

Ces préliminaires effectués, passons à la preuve du lemme. Soit X un point de $\text{Teich}(\Sigma)$, et soit U un voisinage de X tel que pour tout point Y de ce voisinage on ait $\mathcal{S}(Y) \subset \mathcal{S}(X)$. Fixons une décomposition en pantalons \mathcal{P} de Σ . Comme $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}(X)$ est fini, il existe une géodésique fermée simple orientable $\gamma \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ intersectant chaque élément de $\mathcal{P} \cup \mathcal{S}(X)$. Pour n suffisamment grand, chaque composante de la décomposition $t_\gamma^n(\mathcal{P})$ intersecte tous les éléments de $\mathcal{S}(X)$. La métrique euclidienne associée aux coordonnées Fenchel-Nielsen généralisées du théorème convient. \square

6.2.2. Théorie de Voronoï géométrique. — La systole n'étant pas différentiable, nous aurons recours au *théorème de Voronoï* pour caractériser ses maxima locaux.

En analogie avec la théorie des réseaux euclidiens, C. Bavard a introduit dans [Bav97] différents types de point ayant des propriétés remarquables vis-à-vis des fonctions longueur des géodésiques réalisant la systole.

Définition 6.5. — On dit que le point X est

- *extrême* s'il réalise un maximum local de la systole.
- *parfait* si les gradients $(\nabla \ell_s(X))_{s \in \mathcal{S}(X)}$ engendrent affinement $T_X \text{Teich}(\Sigma)$.
- *eutactique* si le vecteur nul de $T_X \text{Teich}(\Sigma)$ appartient à l'intérieur affine de l'enveloppe convexe des gradient $(\nabla \ell_s(X))_{s \in \mathcal{S}(X)}$.

Ces notions ne dépendent pas de l'isomorphisme entre le tangent et le cotangent. Elles ne dépendent pas non plus du marquage, mais seulement de la classe d'isométrie de X . Ainsi on peut parler de *surface* extrême, parfaite ou eutactique.

H. Akrouit a étudié dans [Akr03] les singularités de la systole, il a montré :

Théorème. — *La systole est une fonction de Morse topologique sur l'espace de Teichmüller. Ses points critiques correspondent exactement aux points eutactiques.*

Il en déduit ([Akr03] § 6.3) la finitude des points eutactiques modulo l'action du groupe modulaire, ainsi qu'une formule pour la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire. On a également un résultat de finitude et d'algébricité pour les points parfaits (C. Bavard [Bav05b] § 2.12). La preuve de ce théorème utilise la structure algébrique de l'espace de Teichmüller. Nous ne ferons pas appel à ce résultat.

En revanche, nous aurons besoin de l'analogie du théorème de Voronoï obtenu par P. Schmutz (théorème 2.7 de [Sch93]). En toute rigueur, le théorème de P. Schmutz ne s'applique qu'aux surfaces orientables, car il repose sur les propriétés de convexité des fonctions longueur de géodésique vis-à-vis de la métrique de Weil-Petersson et du flot *earthquake*. Mais C. Bavard a déterminé dans [Bav97] une condition nécessaire pour la validité de ce théorème dans un cadre général (il donne dans [Bav05b] une condition nécessaire et suffisante). Nous énonçons le théorème sous la forme élégante qu'en donne C. Bavard dans [Bav97] § 2.3 :

Théorème. — *Un point de l'espace de Teichmüller est extrême si et seulement si il est parfait et eutactique.*

Afin de trouver les points remarquables, on peut s'aider des classes minimales et des symétries. La *classe minimale* d'une partie S de $\mathcal{S}(\Sigma)$ est le sous-ensemble

$$C_S = \{X \in \text{Teich}(\Sigma) ; \mathcal{S}(X) = S\}.$$

Les classes minimales forment une partition $\text{Mod}(\Sigma)$ -invariante de $\text{Teich}(\Sigma)$. Le groupe des isométries d'un point de $\text{Teich}(\Sigma)$ correspond exactement à son stabilisateur pour l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$. Les symétries éventuelles s'avèrent très utiles pour décider si un point est eutactique, comme le montre le lemme 1.2 de [Bav05b] :

Lemme. — *Un point fixe isolé d'un sous-groupe fini de $\text{Mod}(\Sigma)$ est eutactique.*

7. Le tore à un bord et la surface fermée de caractéristique -1

Soit Σ la somme connexe de trois plans projectifs réels, nous allons étudier $\text{Teich}(\Sigma)$. Nous allons travailler dans les coordonnées Fenchel-Nielsen associées à l'ovale γ_0 et à une géodésique orientable γ_1 .

La fonction longueur $\ell_0 : \text{Teich}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ définit une fibration, et les coordonnées Fenchel-Nielsen donnent précisément une trivialisatoin de cette fibration. Chaque fibre $\{\ell_0 = b/2\}$ s'identifie canoniquement à l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(\mathbb{T}, b)$ des tores avec un bord de longueur $b > 0$. La classe d'isotopie de l'ovale étant canonique, elle est invariante par $\text{Mod}(\Sigma)$, qui par conséquent agit en préservant les fibres de ℓ_0 . L'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur la fibre $\{\ell_0 = b/2\}$ correspond exactement à l'action naturelle de $\text{Mod}(\mathbb{T}) \simeq \text{Mod}(\Sigma)$ sur $\text{Teich}(\mathbb{T}, b)$. Nous allons donc regarder cette action.

7.1. Points fixes d'isométries et lieux d'égalité de longueurs. — Dans le cas du tore à un bord \mathbb{T} , il y a une bijection canonique entre le premier groupe d'homologie et les géodésiques fermées simples orientées comptées avec multiplicité :

$$H_1(\mathbb{T}; \mathbf{Z}) \setminus \{0\} \simeq \mathcal{S}(\mathbb{T}) \times \mathbf{Z}^* \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(H_1(\mathbb{T}; \mathbf{Z})) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{T}).$$

Les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ sont en bijection avec les éléments indivisibles de $H_1(\mathbb{T}; \mathbf{Z})/\{\pm 1\}$. De plus, la forme d'intersection $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'identifie au déterminant, et induit l'intersection géométrique $i(\cdot, \cdot)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{T})$. Ainsi, un élément de $\text{Mod}(\mathbb{T})$ est entièrement déterminé par son action sur le premier groupe d'homologie, d'où $\text{Mod}(\mathbb{T}) \simeq \text{GL}(2, \mathbf{Z})$.

Clairement $\text{Mod}^+(\mathbb{T})/\langle \iota_{\mathbb{T}} \rangle$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des paires de géodésiques $\{\alpha, \beta\}$ avec $i(\alpha, \beta) = 1$. De même, il agit simplement transitivement sur l'ensemble des paires de géodésiques $\{\gamma, \delta\}$ avec $i(\gamma, \delta) = 2$. En effet, étant données deux géodésiques α et β avec $i(\alpha, \beta) = 1$, il existe exactement deux géodésiques γ et δ complétant α et β en des triangles.

Lemme 7.1. — *L'application $\{\alpha, \beta\} \mapsto \{\gamma, \delta\}$ établit une bijection entre les paires de géodésiques s'intersectant en un point et les paires de géodésiques s'intersectant en deux points.*

Démonstration. — Les applications $\{\alpha, \beta\} \mapsto \{\alpha + \beta, \alpha - \beta\}$ et $\{\gamma, \delta\} \mapsto \{\frac{\gamma + \delta}{2}, \frac{\gamma - \delta}{2}\}$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des paires $\{\alpha, \beta\}$ avec $i(\alpha, \beta) = 1$ et l'ensemble des paires $\{\gamma, \delta\}$ avec $i(\gamma, \delta) = 2$. Ici on regarde les géodésiques comme des éléments indivisibles $H_1(\mathbb{T}; \mathbf{Z})/\{\pm 1\}$. On montre facilement que si $i(\gamma, \delta) = 2$, alors $\gamma + \delta$ et $\gamma - \delta$ sont bien divisibles par 2 dans $H_1(\mathbb{T}; \mathbf{Z})$. \square

Voici une version légèrement différente de l'étude menée au § 4.1 :

Lemme 7.2. — *Soit φ une involution négative de $\text{Mod}(\mathbb{T})/\langle \iota_{\mathbb{T}} \rangle$.*

1. *Il existe une unique paire de géodésiques $\{\alpha, \beta\}$ telle que $\varphi_*(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$.*
2. *Il existe une unique paire de géodésiques $\{\gamma, \delta\}$ telle que $\varphi_*(\gamma, \delta) = (\delta, \gamma)$.*

Chacune de ces correspondances établit une bijection entre les involutions négatives de $\text{Mod}(\mathbb{T})/\langle \iota_{\mathbb{T}} \rangle$ et les paires de géodésiques de \mathbb{T} s'intersectant en au plus 2 points.

Remarque 7.3. — On voit facilement que

- φ est de type 1 si et seulement si $i(\alpha, \beta) = 1$ et $i(\gamma, \delta) = 2$,
- φ est de type 2 si et seulement si $i(\alpha, \beta) = 2$ et $i(\gamma, \delta) = 1$.

Démonstration. — Nous avons vu que toute involution négative φ de $\text{Mod}(\mathbb{T})$ fixe point-à-point un segment orthogonal à $\partial\mathbb{T}$, nous prenons pour α la géodésique duale à ce segment, et pour β la géodésique duale au segment fixé point-à-point par $\varphi\iota_{\mathbb{T}}$. Les géodésiques γ et δ sont les deux géodésiques intersectant α et β en exactement un point. Il y a clairement unicité de la paire $\{\alpha, \beta\}$, et par le lemme ci-dessus il y a existence et unicité de la paire $\{\gamma, \delta\}$. \square

Ces bijections nous seront utiles, car à une involution négative $\varphi \in \text{Mod}(\mathbb{T})/\langle\iota_{\mathbb{T}}\rangle$ correspond sa droite de points fixes dans $\text{Teich}(\mathbb{T})$ caractérisée par :

$$\text{Fix}(\varphi) = \{\ell_{\gamma} = \ell_{\delta}\} = \{\theta_{\alpha} = c\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c \in \mathbf{Z} & \text{si } \varphi \text{ est de type 1} \\ c \in 1/2 + \mathbf{Z} & \text{si } \varphi \text{ est de type 2} \end{cases} .$$

L'involution φ agit comme une réflexion en les coordonnées Fenchel-Nielsen associées à α .

7.2. Domaine fondamental. — Appelons γ_2 la géodésique orthogonale à γ_1 en un point de Weierstrass lorsque $\theta_1 = 0$. P. Buser et K.-D. Semmler ont montré dans [BS88] que $\mathcal{D}_b = \{0 \leq \theta_1 \leq 1/2 \text{ et } \ell_1 \leq \ell_2\}$ est un domaine fondamental pour l'action de $\text{Mod}(\mathbb{T})$ sur $\text{Teich}(\mathbb{T}, b)$. Je remercie P. Buser qui m'a indiqué son article.

Comme deux systoles s'intersectent en au plus un point, nous pouvons réécrire \mathcal{D}_b comme ci-dessous. Ceci nous permet de donner une preuve plus simple de ce résultat.

Proposition 7.4. — *Le sous-ensemble $\mathcal{D}_b = \{0 \leq \theta_1 \leq 1/2 \text{ et } \ell_1 = \text{sys}\}$ forme un domaine fondamental pour l'action de $\text{Mod}(\mathbb{T})$ sur $\text{Teich}(\mathbb{T}, b)$.*

Démonstration. — Le groupe modulaire agit transitivement sur $\mathcal{S}(\mathbb{T})$. Ainsi, toute orbite de $\text{Mod}(\mathbb{T})$ a au moins un point satisfaisant $\ell_1 = \text{sys}$. Quitte à faire agir les involutions négatives fixant $\{\theta_1 = 0\}$ et $\{\theta_1 = 1/2\}$, on satisfait aussi la deuxième condition. Donc \mathcal{D}_b contient un domaine fondamental.

Soient X et Y deux points de $\text{Int}(\mathcal{D}_b)$ appartenant à la même $\text{Mod}(\mathbb{T})$ -orbite, de manière équivalente X et Y sont isométriques. Les points de $\text{Int}(\mathcal{D}_b)$ ont une seule géodésique réalisant la systole, il s'agit de γ_1 . Comme la longueur ℓ_1 et le coefficient de twist $(\theta_1 \bmod \mathbf{Z})$ ne dépendent que de la classe d'isométrie, on a $\ell_1(X) = \ell_1(Y)$ et $\theta_1(X) \equiv \theta_1(Y) \bmod \mathbf{Z}$. On en déduit trivialement que $X = Y$. \square

Sur les figures 9 et 10, le lieu $\{0 \leq \theta_1 \text{ et } \ell_1 = \ell_2\}$ est représenté par la courbe

$$\begin{cases} \theta_1(t) &= \left(\text{arccosh} \sqrt{\frac{t(t-1)}{\cosh(b/4)^2 + t - 1}} \right) / \left(\text{arccosh} \sqrt{t} \right) \\ \ell_1(t) &= 2 \text{arccosh} \sqrt{t} \end{cases} \quad t \in [1 + \cosh(b/4), +\infty[.$$

Nous appelons γ_3 et γ_4 les deux géodésiques qui forment des triangles avec γ_1 et γ_2 . Le bord de \mathcal{D}_b consiste en des lieux d'égalité de longueurs, donc en des points fixes d'involutions. Deux involutions sont de type 2, la troisième est de type 1. Ainsi un sommet a un stabilisateur isomorphe à D_4 , et l'autre un stabilisateur isomorphe à D_6 . Ces points représentent respectivement le tore carré et le tore hexagonal.

L'orbite de \mathcal{D}_b sous l'action de $\text{Mod}(\mathbb{T})$ forme un pavage de $\text{Teich}(\mathbb{T}, b)$ (figure 10). Sur ce pavage, nous pouvons lire les relations entre les générateurs, et déterminer une présentation de $\text{Mod}(\mathbb{T})/\langle\iota_{\mathbb{T}}\rangle$. L'orbisurface $\text{Mod}(\mathbb{T}) \backslash \text{Teich}(\mathbb{T})$ est de type $(; 2, 3, \infty)$, nous retrouvons donc $\text{Mod}(\mathbb{T})/\langle\iota_{\mathbb{T}}\rangle \simeq D_2 *_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}} D_3 \simeq \text{PGL}(2, \mathbf{Z})$, et $\text{Mod}(\mathbb{T}) \simeq \text{GL}(2, \mathbf{Z})$. La ressemblance avec le pavage usuel du demi-plan par des triangles hyperboliques $(2, 3, \infty)$ est frappante. Dans le cas usuel, le triangle $(ie^{i\pi/3}\infty)$ coïncide l'ensemble

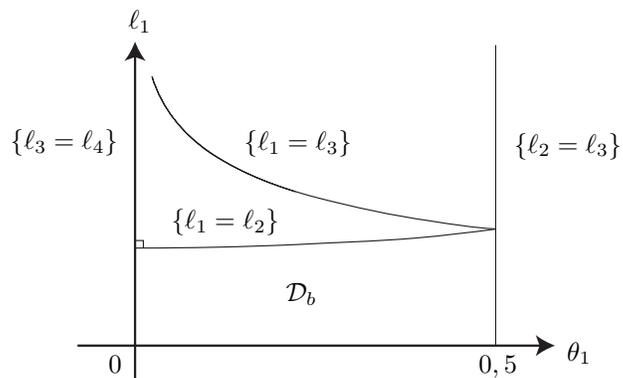


FIGURE 9. Le domaine fondamental \mathcal{D}_b

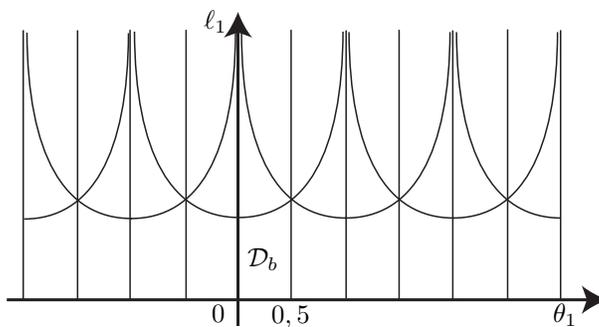


FIGURE 10. Pavage de $\text{Teich}(\mathbb{T}, b)$

Dimension	Classes minimales
2	$C_{\{\gamma_1\}}$
1	$C_{\{\gamma_1, \gamma_2\}}$
0	$C_{\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}}$

FIGURE 11. Classes minimales de \mathbb{T}

des tores plats défini par $\{0 \leq \theta_1 \leq 1/2 \text{ et } \ell_1 = \text{sys}\}$. Notez que, dans le cas des tores plats normalisés par le volume égal à 1, la coordonnée des ordonnées représente $1/\ell_1^2$.

7.3. Classes minimales et points remarquables. — Sur la figure 9, on observe que le domaine fondamental \mathcal{D}_b se décompose en trois classes minimales (tableau 11). Comme un point parfait a au moins la dimension de l'espace de Teichmüller plus une systoles, il vient que le seul point parfait de \mathcal{D}_b est le tore hexagonal. C'est *a fortiori* le seul point extrême, d'où le théorème de P. Schmutz :

Théorème. — *Les tores hyperboliques avec un bord de longueur $b \geq 0$ satisfont l'inégalité $\cosh(\text{sys}/2) \leq \cosh(b/6) + 1/2$. Le cas d'égalité caractérise les tores hexagonaux.*

Il y a en revanche deux points eutactiques : le tore équilatéral et le tore carré. Ces points sont eutactiques en tant que points fixes isolés de sous-groupes de $\text{Mod}(\mathbb{T})$ (lemme 6.2.2). Il n'y a pas d'autres points eutactiques. Soit X un point eutactique, il a au moins deux systoles, donc se situe sur $\{0 < \theta_1 < 1/2 \text{ et } \ell_1 = \ell_2\}$. Mais la réflexion fixant $\{\ell_1 = \ell_2\}$ échange les gradients $\nabla \ell_1(X)$ et $\nabla \ell_2(X)$. De ce fait X est eutactique si et seulement $\nabla \ell_1(X)$ est orthogonal à $\{\ell_1 = \ell_2\}$, ce qui n'est pas le cas.

7.4. La surface fermée de caractéristique -1 . — Nous déduisons du § 7.2 que le sous-ensemble $\mathcal{D} = \{0 \leq \theta_1 \leq 1/2 \text{ et } \ell_1 \leq \ell_2\}$ forme un domaine pour l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $\text{Teich}(\Sigma)$. Nous allons le décomposer en classes minimales

La géodésique γ_1 réalise la systole de \mathbb{T} dans \mathcal{D} . Vu le § 2.2, cela implique

$$\text{sys} = \min(\ell_0, \ell_1, \ell_{\gamma'_1}).$$

Posons $x = \cosh(\ell_1/2)^2$ et $z = \cosh(\ell_0/2)^2$. Les lieux d'égalité entre γ_0 , γ_1 et γ'_1 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \ell_0 = \ell_1 &\Leftrightarrow z = x \\ \ell_0 = \ell_{\gamma'_1} &\Leftrightarrow z = 1 + \sqrt{x} \\ \ell_1 = \ell_{\gamma'_1} &\Leftrightarrow z = 1 + \frac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

Les surfaces déterminées par ces équations sont invariantes par translation suivant l'axe de θ_1 . Connaissant ces équations, nous décomposons sans difficultés \mathcal{D} en classes minimales. La figure 12 représente cette décomposition en les coordonnées (x, θ_1, z) . Le tableau 13 répertorie les classes minimales formant une partition de \mathcal{D} .

Lemme 7.5. — *Il y a exactement deux surfaces -1 eutactiques : X_P et X_H .*

Démonstration. — Soit X un point de \mathcal{D} , nous allons montrer que si X est eutactique alors il appartient à une des deux classes minimales de dimension 0.

1) Si $\mathcal{S}(X) \subset \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma'_1\}$, ou si $\mathcal{S}(X) \subset \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma'_1, \gamma'_2\}$ et $\theta_1(X) > 0$, alors X n'est pas eutactique. Regardons les gradients des fonctions longueur ℓ_0 , ℓ_1 , $\ell_{\gamma'_1}$ et $\ell_{\gamma'_2}$ dans

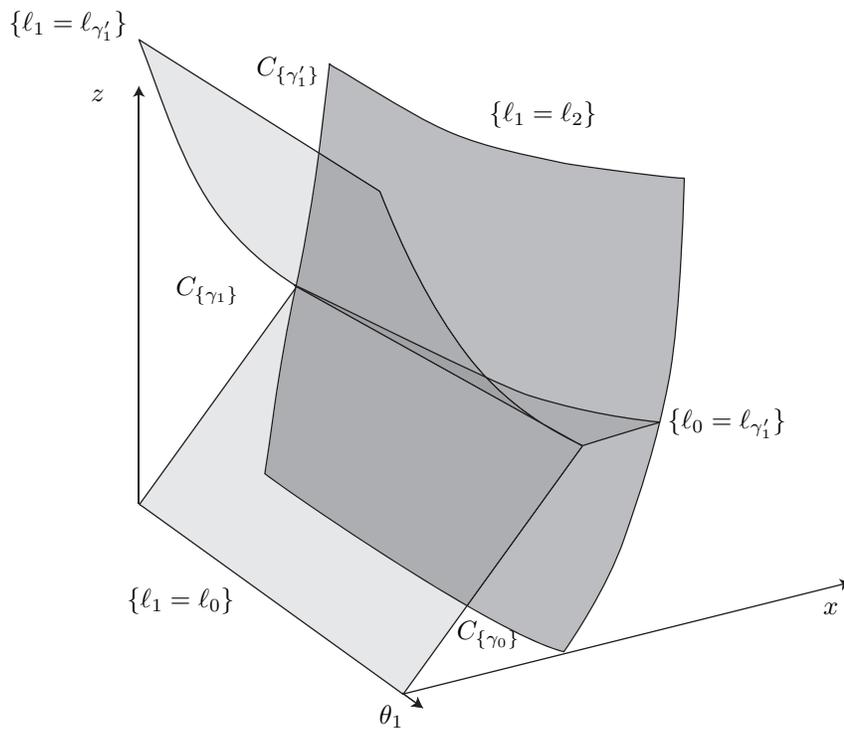


FIGURE 12. Paysage systolique de Σ

Dimension	Classes minimales
3	$C_{\{\gamma_0\}}, C_{\{\gamma_1\}}, C_{\{\gamma'_i\}}$
2	$C_{\{\gamma_0, \gamma_1\}}, C_{\{\gamma_1, \gamma'_i\}}, C_{\{\gamma'_i, \gamma_0\}}, C_{\{\gamma'_i, \gamma'_2\}}$
1	$C_{\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma'_i\}}, C_{\{\gamma'_i, \gamma'_2, \gamma'_3\}}, C_{\{\gamma_0, \gamma'_i, \gamma'_2\}}$
0	$C_{\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma'_i, \gamma'_2\}}, C_{\{\gamma_0, \gamma'_i, \gamma'_2, \gamma'_3\}}$

FIGURE 13. Classes minimales de Σ

le système de coordonnées $(\theta_1, \ell_1, \ell_0)$. En dérivant les égalités

$$\begin{aligned} \sinh(\ell_{\gamma'_1}/2) &= \frac{\cosh(\ell_1/2)}{\sinh(\ell_0/2)}, \\ \sinh(\ell_{\gamma'_2}/2) &= \cosh(\theta_1 \ell_1/2) \left(\frac{\coth(\ell_0/2)^2}{\sinh(\ell_1/2)^2} + \frac{1}{\sinh(\ell_0/2)^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

nous obtenons les informations suivantes :

$$\nabla \ell_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla \ell_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \ell_{\gamma'_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \ell_{\gamma'_2} = \begin{pmatrix} > 0 \\ * \\ < 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } \theta_1 > 0.$$

Nous en déduisons facilement l'assertion. Notez que les points de $C_{\{\gamma_0, \gamma'_1, \gamma'_2\}}$ ont tous une coordonnée θ_1 positive.

2) Si $\mathcal{S}(X) \subset \{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\}$ alors X n'est pas eutactique. La famille $\{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\}$ forme une décomposition en pantalons de Σ , ainsi $(\ell_{\gamma'_1}, \ell_{\gamma'_2}, \ell_{\gamma'_3})$ donne une carte globale de $\text{Teich}(\Sigma)$. Ceci implique trivialement l'assertion.

3) Le point de \mathcal{D} associé à X_P est eutactique. L'involution fixant $\{\ell_1 = \ell_2\}$ échange les géodésiques γ_1 et γ_2 , donc leurs gradients. Comme $\nabla \ell_1$ est orthogonal à $\{\ell_1 = \ell_2\}$ au point considéré, ce dernier est bien eutactique.

4) Le point de \mathcal{D} associé à X_H est eutactique. Les points extrêmes sont eutactiques. Nous savons déjà que les seuls points eutactiques éventuels sont X_P et X_H . Comme $\text{sys}(X_H) > \text{sys}(X_P)$ il vient que X_H est extrême donc eutactique. \square

Lemme 7.6. — Il y a exactement une surface $_{-1}$ parfaite : X_H .

Démonstration. — Les seuls candidats sont X_P et X_H , car une surface $_{-1}$ parfaite a au moins 4 systoles. Nous avons déjà vu que X_H est extrême, en particulier parfaite. Si X_P était parfaite, alors elle serait aussi extrême. Mais le tore \mathbb{T}_{X_P} n'est pas extrême, et la relation de dualité montre qu'on peut localement augmenter $\ell_1, \ell_2, \ell_{\gamma'_1}$ et $\ell_{\gamma'_2}$ sans changer ℓ_0 . \square

Théorème 7.7. — Les surfaces hyperboliques fermées de caractéristique -1 satisfont l'inégalité $\cosh(\text{sys}) \leq (5 + \sqrt{17})/2$. Le cas d'égalité caractérise X_H à isométrie près.

8. La bouteille de Klein à un bord et le plan projectif à deux bords

8.1. La bouteille de Klein à un bord. — Soit \mathbb{K} la bouteille de Klein à un bord. Par auto-recollement du bord $\partial\mathbb{K}$, l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(\mathbb{K}, b)$ ($b > 0$) se plonge dans $\text{Teich}(\Sigma)$. Ce plongement est bien défini à conjugaison près par un élément de $\text{Mod}(\Sigma)$. Dans la suite, nous appelons γ_1 la géodésique orientable de \mathbb{K} , et nous l'identifions à une géodésique orientable de Σ .

L'image du plongement consiste en la surface $\{\ell_{\gamma'_1} = b/2\}$ invariante par translation le long de l'axe de θ_1 . Le groupe modulaire $\text{Mod}(\mathbb{K})$ est isomorphe au sous-groupe de

$\text{Mod}(\Sigma)$ formé des éléments fixant γ_1 , et le plongement est équivariant par rapport aux actions de ces groupes. Nous travaillons dans les coordonnées (θ_1, ℓ_1) induites par les coordonnées $(\theta_1, \ell_1, \ell_0)$ de $\text{Teich}(\Sigma)$.

Lemme 8.1. — *Nous avons :*

1. Le sous-ensemble $\{0 \leq \theta_1 \leq 1/2\}$ forme un domaine fondamental pour l'action de $\text{Mod}(\mathbb{K})$ sur $\text{Teich}(\mathbb{K}, b)$.
2. Le groupe modulaire $\text{Mod}(\mathbb{K})$ est isomorphe à $D_\infty \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Démonstration. — On prouve la première affirmation en utilisant les arguments de la proposition 7.4. Pour la deuxième, on remarque que $\text{Mod}(\mathbb{K})/\langle \iota_{\mathbb{K}} \rangle$ est engendré par les réflexions suivant les droites $\{\theta_1 = 0\}$ et $\{\theta_1 = 1/2\}$. \square

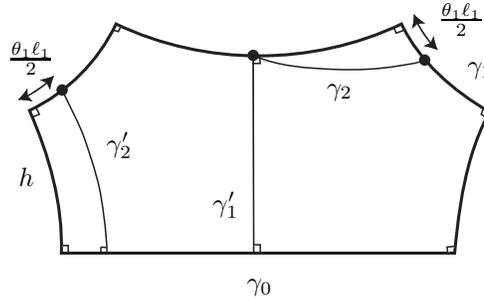


FIGURE 14. Hexagone droit

Remarque 8.2. — Pour déterminer $\text{Mod}(\mathbb{K})$ de manière algébrique, il suffit de prendre la courbe γ_1 duale de $\partial\mathbb{K}$ comme premier vecteur d'une base de $H_1(\mathbb{T}, \mathbf{Z})$, alors $\text{Mod}(\mathbb{K})$ s'identifie au sous-groupe de $\text{GL}(2, \mathbf{Z}) \simeq \text{Mod}(\mathbb{T})$ fixant, au signe près, le premier vecteur de la base, c'est-à-dire au sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}; a \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Rappelons que deux géodésiques ont même longueur si et seulement si leurs duales ont même longueur. Ainsi, sur le domaine fondamental $\{0 \leq \theta_1 \leq 1/2\}$ nous avons $\text{sys} = \inf(\ell_{\gamma_1}, \ell_{\gamma'_2})$. La figure 14 représente l'hexagone moitié du pantalon obtenu par découpe de γ_0 et γ_1 partant de Σ . En travaillant dans le trirectangle en bas à gauche, on trouve l'identité

$$\begin{aligned} \sinh(\ell_{\gamma'_2}/2) &= \sinh(h) \cosh(\theta_1 \ell_1/2), \\ &= \frac{\cosh(\ell_{\gamma'_1}/2)}{\sinh(\ell_1/2)} \cosh(\theta_1 \ell_1/2). \end{aligned}$$

Comme $l_{\gamma'_1} = b/2$ il vient que le lieu d'égalité $\{\ell_1 = l_{\gamma'_2}\}$ correspond à la courbe

$$\begin{cases} \theta_1(t) &= \operatorname{arccosh}\left(\frac{t^2}{\cosh(b/4)}\right) / \operatorname{arcsinh}(t) \\ \ell_1(t) &= 2\operatorname{arcsinh}(t) \end{cases} \quad t \in [\sqrt{\cosh(b/4)}, +\infty[.$$

Cette courbe coupe le domaine fondamental en deux (figure 15). Nous en déduisons qu'il y a 5 classes minimales (tableau 16).

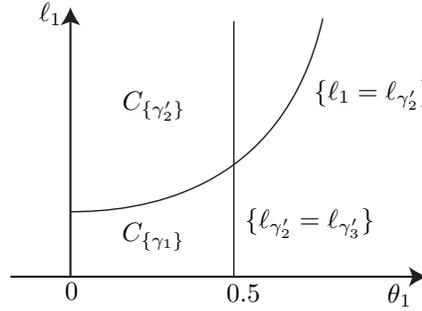


FIGURE 15. Paysage systolique de \mathbb{K}

Dimension	Classes minimales
2	$C_{\{\gamma_1\}}, C_{\{\gamma'_2\}}$
1	$C_{\{\gamma_1, \gamma'_2\}}, C_{\{\gamma'_2, \gamma'_3\}}$
0	$C_{\{\gamma_1, \gamma'_2, \gamma'_3\}}$

FIGURE 16. Classes minimales de \mathbb{K}

Pour une raison de cardinalité évidente, il y a exactement une surface parfaite, et donc aussi exactement une surface extrême. On calcule la systole de la surface extrême en découpant γ'_2 et γ'_3 dans \mathbb{K} . On obtient alors un pantalon hyperbolique avec un bord de longueur b et deux bord de longueur $2\operatorname{sys}$. Ce pantalon se divise en deux hexagones droits isométriques. La médiatrice du côté provenant du bord de \mathbb{K} divise à nouveau chaque hexagone en deux pentagones droits isométriques. La trace de γ_1 (voir figure 4) partage chacun de ces pentagones droit en un trirectangle et un pentagone. Dans un de ces trirectangles on a l'identité $\sinh(\gamma_1/4) = \sinh(h) \cosh(\gamma'_2/2)$ où h désigne la longueur moitié de la perpendiculaire commune à γ'_2 et γ'_3 . Dans le pentagone droit h vérifie $\sinh(h) \sinh(\gamma'_2) = \cosh(b/4)$, d'où

Théorème 8.3. — *Les bouteilles de Klein hyperboliques avec un bord de longueur $b \geq 0$ satisfont l'inégalité $\cosh(\operatorname{sys}/4) \leq X_0$ où X_0 est l'unique racine supérieure à 1 de l'équation $X^3 - X = \cosh(b/4)/4$. Le cas d'égalité est uniquement réalisé à isométrie près.*

Une surface eutactique a au moins deux systoles, mais nous pouvons déjà éliminer les surfaces de $C_{\{\gamma'_2, \gamma'_3\}}$ car $\{\gamma'_2, \gamma'_3\}$ est une décomposition en pantalons de \mathbb{K} . La classe minimale $C_{\{\gamma_1, \gamma'_2\}}$ est un intervalle semi-ouvert, elle contient exactement un point eutactique qui est son extrémité. Grâce à l'identité vue plus haut, nous obtenons (dans les coordonnées (θ_1, ℓ_1)) :

$$\nabla \ell_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla \ell_{\gamma'_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ < 0 \end{pmatrix} \text{ si } \theta_1 = 0, \quad \nabla \ell_{\gamma'_2} = \begin{pmatrix} > 0 \\ < 0 \end{pmatrix} \text{ si } \theta_1 > 0.$$

Ce qui nous permet de conclure qu'il y a exactement deux points eutactiques dans $\text{Teich}(\mathbb{K}, b)$, modulo l'action de $\text{Mod}(\mathbb{K})$.

8.2. Le plan projectif à deux bords. — Soit \mathbb{P} le plan projectif à deux bords. Nous notons b_1 et b_2 les longueurs assignées aux bords de \mathbb{P} . Nous appelons γ et δ les deux géodésiques de \mathbb{P} . Si l'on regarde \mathbb{P} comme obtenu par découpage de deux courbes non orientables disjointes γ'_1 et γ'_2 de Σ , alors les courbes les duales de γ et δ sont les courbes complétant γ_1 et γ_2 en des triangles.

Lemme 8.4. — *Nous avons :*

1. *Le sous-ensemble $\{\ell_\gamma \leq \ell_\delta\}$ forme un domaine fondamental pour l'action de $\text{Mod}(\mathbb{P})$ sur $\text{Teich}(\mathbb{P}, b_1, b_2)$.*
2. *Le groupe modulaire $\text{Mod}(\mathbb{P})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.*

Démonstration. — Le groupe modulaire $\text{Mod}(\mathbb{P})$ s'identifie au sous-groupe de $\text{Mod}(\Sigma)$ stabilisant γ_1 et γ_2 . Il s'agit du sous-groupe formé des involutions fixant $\{\theta_1 = 0\}$, d'où $\text{Mod}(\mathbb{P}) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Le groupe $\text{Mod}(\mathbb{P})/\langle \iota_{\mathbb{P}} \rangle \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ agit de manière effective sur $\text{Teich}(\mathbb{P}, b_1, b_2)$. Il échange γ et δ , d'où le domaine fondamental. \square

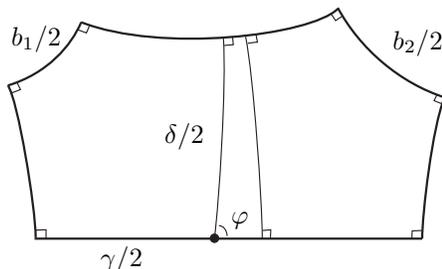
Remarque 8.5. — En travaillant en homologie, on identifie $\text{Mod}(\mathbb{P})$ avec le sous-groupe de $\text{GL}(2, \mathbf{Z})$ fixant, au signe près, les vecteurs de la base canonique.

Il y a 3 classes minimales : $C_{\{\gamma\}}$, $C_{\{\delta\}}$ et $C_{\{\gamma, \delta\}}$. Le domaine fondamental contient donc un seul point eutactique, parfait, extrême.

Théorème 8.6. — *Les plans projectifs hyperboliques avec deux bords de longueur b_1 et b_2 satisfont l'inégalité $\cosh(\text{sys}) \leq \cosh(b_1/2) + \cosh(b_2/2) + 1$. Le cas d'égalité est uniquement réalisé à isométrie près.*

En découpant γ , nous obtenons un pantalon se divisant en deux hexagones droits isométriques. Nous localisons facilement la géodésique δ : elle passe par le milieu de la base du pentagone (point de Weierstrass) et coupe orthogonalement le côté opposé (ovale). Sur la figure 18 nous remarquons les relations trigonométriques suivantes (voir [Bus92] exemple 2.2.7) :

$$\begin{aligned} \cosh(b_1/2) &= + \cosh(\gamma/2) \cosh(\delta/2) \cos(\varphi) + \sinh(\gamma/2) \sinh(\delta/2), \\ \cosh(b_2/2) &= - \cosh(\gamma/2) \cosh(\delta/2) \cos(\varphi) + \sinh(\gamma/2) \sinh(\delta/2). \end{aligned}$$

FIGURE 17. Géodésiques de \mathbb{P}

Les longueurs des géodésiques et des bords sont donc reliées par la formule :

$$(1) \quad 2 \sinh(\ell_\gamma/2) \sinh(\ell_\delta/2) = \cosh(b_1/2) + \cosh(b_2/2).$$

Cette égalité a aussi été obtenue par P. Norbury (égalité (6) de [Nor08]) *via* une identité sur les traces.

8.3. Le pantalon. — Nous donnons la solution d'un exercice facile. Une géodésique réalisant la systole d'un pantalon hyperbolique a exactement un point d'intersection avec elle-même. Cette géodésique est topologiquement un huit. Nous en déduisons qu'il y a exactement trois classes d'homotopie libre pouvant réaliser la systole. Soient α et β deux générateurs du groupe fondamental librement homotopes à deux bords du pantalon. On suppose $\gamma = \alpha\beta$ librement homotope au troisième bord. Les géodésiques susceptibles de réaliser la systole correspondent aux classes d'homotopie libre de $\alpha\beta^{-1}$, $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$. Déterminer la systole revient à déterminer leurs longueurs.

L'action de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ sur \mathbb{H}^2 coïncide avec l'action par homographies de $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$. De plus, la longueur d'une géodésique orientable α est donnée par $\cosh(\ell_\alpha/2) = \text{Tr}(A)/2$ où A désigne un élément du groupe uniformisant se projetant sur α . Ainsi de l'identité

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B) - \text{Tr}(AB^{-1}) \quad (\forall A, B \in \text{PSL}(2, \mathbf{C})).$$

nous déduisons (en faisant attention au signe des traces)

$$\begin{aligned} \cosh(\ell_{\alpha\beta^{-1}}/2) &= 2 \cosh(\ell_\alpha/2) \cosh(\ell_\beta/2) + \cosh(\ell_\gamma/2), \\ \cosh(\ell_{\alpha\gamma}/2) &= 2 \cosh(\ell_\alpha/2) \cosh(\ell_\gamma/2) + \cosh(\ell_\beta/2), \\ \cosh(\ell_{\beta\gamma}/2) &= 2 \cosh(\ell_\beta/2) \cosh(\ell_\gamma/2) + \cosh(\ell_\alpha/2). \end{aligned}$$

Nous retrouvons ces relations de manière purement géométrique de la façon suivante : en découpant le pantalon suivant les perpendiculaires communes aux bords on obtient un hexagone droit dans lequel on trouve

$$\cosh(h) = \frac{\cosh(\beta/2) + \cosh(\alpha/2) \cosh(\gamma/2)}{\sinh(\alpha/2) \sinh(\gamma/2)},$$

où h désigne la perpendiculaire commune entre α et γ ; comme un segment moitié de $\alpha\beta^{-1}$ partage l'octogone droit de la figure 18 en deux hexagones droits il vient

$$\cosh(h) = \frac{\cosh(\alpha\beta^{-1}/2) + \cosh(\alpha) \cosh(\gamma/2)}{\sinh(\alpha) \sinh(\gamma/2)}.$$

On en déduit facilement la formule ci-dessus.

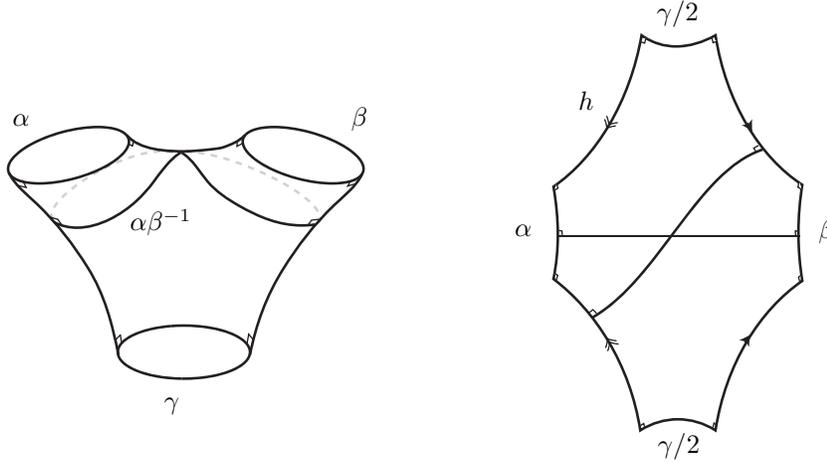


FIGURE 18. Systole du pantalon

9. D'autres invariants de type systole

Nous nous intéressons maintenant à d'autres invariants métriques de type systole, c'est-à-dire définis comme minimum de certaines familles de fonctions longueur (pas nécessairement des fonctions longueur de géodésique). En appliquant la méthode des classes minimales, utilisée précédemment pour la systole, nous arrivons à déterminer le maximum global de chaque invariant sur $\text{Teich}(\Sigma)$. Nous renvoyons à [Gen06] pour les preuves détaillées des trois premières proposition.

Travaillons à nouveau avec Σ , la somme connexe de trois plans projectifs. Appelons *systole orientable* (resp. *systole non orientable*) et notons sys^+ (resp. sys^-) la longueur de la plus courte géodésique orientable (resp. non orientable). Nous ne supposons pas ici les géodésiques primitives ou essentielles, en particulier une géodésique orientable peut être le double d'une non orientable. Nous trouvons :

Proposition 9.1. — *Les surfaces₋₁ satisfont l'inégalité $\cosh(\text{sys}^+/2) \leq (5 + \sqrt{17})/4$. Le cas d'égalité est uniquement réalisé, à isométrie près, par la surface hexagonale pour laquelle les géodésiques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1'^2, \gamma_2'^2, \gamma_3'^2$ ont mêmes longueurs.*

Proposition 9.2. — *Les surfaces₋₁ satisfont l'inégalité $\cosh(\text{sys}^-) \leq (5 + \sqrt{17})/2$. Le cas d'égalité est uniquement réalisé par la surface X_H à isométrie près.*

Soit $\{\alpha, \beta\}$ une paire de géodésiques fermées simples et disjointes, on définit sa fonction longueur par $\ell_{\{\alpha, \beta\}} = \max(\ell_\alpha, \ell_\beta)$. Suivant P. Schmutz ([Sch93]) on appelle 2-systole la fonction $\text{sys}_2 = \inf_{\{\alpha, \beta\}} \ell_{\{\alpha, \beta\}}$ où $\{\alpha, \beta\}$ parcourt l'ensemble des paires de géodésiques disjointes. Nous trouvons :

Proposition 9.3. — *Les surfaces₋₁ satisfont l'inégalité $\cosh(\text{sys}_2/2) \leq X_0$ où X_0 est la solution supérieure à 1 de l'équation $2X^3 - 3X^2 - 2X + 2 = 0$, soit $X_0 \simeq 1,74$. Le cas d'égalité est uniquement réalisé, à isométrie près, par la surface hexagonale pour laquelle les géodésiques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma'_1, \gamma'_2$ et γ'_3 ont même longueur.*

On définit la longueur d'une décomposition en pantalons $\mathcal{P} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ comme la longueur de sa plus grande composante : $\ell_{\mathcal{P}} = \max(\ell_{\gamma_1}, \dots, \ell_{\gamma_k})$. On appelle constante de Bers de Σ le supremum sur $\text{Teich}(\Sigma)$ de la fonction $\inf_{\mathcal{P}} \ell_{\mathcal{P}}$, où \mathcal{P} parcourt l'ensemble des décompositions en pantalons de Σ .

Théorème 9.4. — *Soit Σ la surface fermée de caractéristique -1 . La constante de Bers de Σ est donnée par $\cosh(\text{Bers}(\Sigma)) = 3 + 2\sqrt{2}$. Elle est uniquement réalisée, à isométrie près, par la surface pour laquelle les géodésiques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_3$ et γ'_4 ont même longueur.*

Démonstration. — On travaille dans les coordonnées $(\ell_1, \theta_1, \ell_0)$. Dans le domaine fondamental \mathcal{D} , la longueur de la plus courte décomposition en pantalons est réalisée par $\{\gamma_0, \gamma_1\}$ ou $\{\gamma_1, \gamma'_1\}$ ou $\{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\}$. Regardons ce qui se passe dans les classes minimales de la figure 12.

Dans la classe $C_{\{\gamma_1\}}$, la longueur de la plus courte décomposition est donnée par $\min(\ell_0, \ell_{\gamma'_1}, \ell_{\gamma'_3}) = \min(\ell_0, \ell_{\gamma'_1})$, qui atteint sa borne supérieure sur l'adhérence de $C_{\{\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_0\}}$. Ainsi $\cosh(\min(\ell_0, \ell_{\gamma'_1})/2) \leq (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1,61$ sur $C_{\{\gamma_1\}}$.

Dans $C_{\{\gamma_0\}} \cup C_{\{\gamma'_1\}}$, la longueur de la plus courte décomposition est donnée par $\min(\ell_1, \ell_{\gamma'_3})$. Montrons que la borne supérieure de $\min(\ell_1, \ell_{\gamma'_3})$ sur l'adhérence de $C_{\{\gamma_0\}} \cup C_{\{\gamma'_1\}}$ est atteinte. Si une suite de points de \mathcal{D} satisfait $\ell_0 \rightarrow 0$, alors $\cosh(\ell_1/2) \lesssim 3/2$ (inégalité systolique du tore à un bord). Si une suite de points de \mathcal{D} satisfait $\ell_0 \rightarrow \infty$, alors de $\sinh(\ell_{\gamma'_3}/2) \leq \cosh(\ell_{\gamma'_1}/2) \coth(\ell_1/2)$ (voir figure 14) et de

$$\sinh(\ell_{\gamma'_1}/2) = \cosh(\ell_1/2) / \sinh(\ell_0/2) \leq (\cosh(\ell_0/6) + 1/2) / \sinh(\ell_0/2)$$

nous déduisons $\sinh(\ell_{\gamma'_3}/2) \lesssim \coth(\ell_1/2)$ d'où $\cosh(\min(\ell_1, \ell_{\gamma'_3})/2) \lesssim (1 + \sqrt{5})/2$. Dans les deux cas, le majorant sur la limite de $\min(\ell_1, \ell_{\gamma'_3})$ est inférieur à la valeur réalisée par la surface candidate. La borne supérieure est donc bien un maximum.

La fonction $\min(\ell_1, \ell_{\gamma'_3})$ rentre dans le cadre des systoles généralisées, et vérifie le théorème de Voronoï. Comme il s'agit du minimum de seulement deux fonctions longueur, aucun point dans l'intérieur de $C_{\{\gamma_0\}} \cup C_{\{\gamma'_1\}}$ ne réalise un maximum local

de cette fonction (perfection non satisfaite). De même, aucun point à l'intérieur d'une face du bord de $C_{\{\gamma_0\}} \cup C_{\{\gamma'_1\}}$ ne réalise un maximum local de $\min(\ell_1, \ell_{\gamma'_3})$. Ici on utilise implicitement le fait que les faces sont des lieux de points fixes d'isométries. Finalement, le maximum est atteint sur l'une des deux arêtes du bord de $C_{\{\gamma_0\}} \cup C_{\{\gamma'_1\}}$ qui ne sont pas communes à $C_{\{\gamma_1\}}$. Il s'agit des droites de points fixes associées à D_4 et D_6 . Le théorème de Voronoï est encore vérifié sur chacune de ces arêtes, de sorte qu'en un point réalisant un maximum local sur une arête on a $\ell_1 = \ell_{\gamma'_3}$. Cette égalité définit exactement un point sur chacune de ces arêtes. Le point sur l'arête associé à D_4 vérifie $\ell_1 = \ell_2 = \ell_{\gamma'_3} = \ell_{\gamma'_4}$ et $\cosh(\ell_1/2) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \simeq 1,84$, le point sur l'arête associée à D_6 vérifie $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_{\gamma'_1} = \ell_{\gamma'_2} = \ell_{\gamma'_3}$ et $\cosh(\ell_1/2) = X_0 \simeq 1,74$. \square

PARTIE III COMPLÉMENTS

10. Groupes modulaires

On sait depuis W. Lickorish ([Lic63]) que le groupe modulaire d'une surface fermée non orientable n'est pas engendré par les twists de Dehn, mais par les twists de Dehn et les glissements de plan projectif (*crosscap slide* en anglais). En fait, un nombre fini de ces éléments engendre le groupe modulaire (D. Chillingworth [Chi69]). Dans le cas des surfaces à bord, un nombre fini de twists de Dehn, de glissements de plan projectif et de glissements de bord (*boundary slide* ou *puncture slide* en anglais) engendre le groupe modulaire (M. Korkmaz [Kor02]). Les groupes modulaires des surfaces non orientables sont aussi engendrés par un nombre fini d'involutions (B. Szepietowsky [Sze04]).

Ces résultats ne permettent pas toujours d'identifier les groupes modulaires. Ainsi J. Birman et D. Chillingworth ont donné dans [BC72] la présentation suivante du groupe modulaire de la surface fermée de caractéristique -1 (ce résultat n'est pas concerné par [BC04]) :

$$\langle a, b, y \mid aba = bab, yay^{-1} = a^{-1}, yby^{-1} = b^{-1}, y^2 = 1, (aba)^4 = 1 \rangle.$$

Ils n'ont pas reconnu $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$, qui admet pour sa part la présentation

$$\langle s, t, n \mid s^3 t^2 = 1, ntn^{-1}t = 1, nstn^{-1}st = 1, n^2 = 1, t^4 = 1, s^6 = 1 \rangle.$$

Il y a équivalence entre ces présentations, il suffit de poser $n = y$, $t = aba$ et $s = ab$. De même, M. Korkmaz fournit un système de générateurs du groupe modulaire de la bouteille de Klein à un bord (théorème 4.11 de [Kor02]) mais ne l'identifie pas à $D_\infty \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Certains spécialistes connaissaient certainement ces groupes modulaires.

11. Volumes de Weil-Petersson des espaces de modules

Les espaces de Teichmüller des surfaces de Riemann possèdent plusieurs structures géométriques naturelles (*i.e.* invariantes par les éléments positifs du groupe modulaire), notamment une structure complexe et une métrique kählérienne (métrique de Weil-Petersson). La structure symplectique induite par la partie imaginaire de la métrique hermitienne s'exprime par la formule de Wolpert en les coordonnées Fenchel-Nielsen (la normalisation des coordonnées étant habituellement différente de la notre). Dans le cas des surfaces orientables à bord non vide, la formule de Wolpert définit encore une forme symplectique naturelle. Le volume de l'espace des modules relativement à cette forme symplectique a été calculé par M. Mirzakhani dans [Mir07] ; il s'agit d'un polynôme en les longueurs des composantes du bord, dont les coefficients ne dépendent que de la topologie. Ainsi, le volume de l'espace des modules des tores avec un bord de longueur $b \geq 0$ est $(b^2/24 + \pi^2/6)/2$ (on divise par 2 car dans notre définition du groupe modulaire nous considérons également les éléments renversant l'orientation).

P. Norbury a tenté une approche similaire dans le cas non orientable ([Nor08]). Il a introduit la forme volume suivante, qui généralise celle de Weil-Petersson :

$$\bigwedge_{\gamma_i \in \mathcal{P} \text{ orientable}} (d\ell_i \wedge d\tau_i) \wedge \bigwedge_{\gamma_j \in \mathcal{P} \text{ non orientable}} \coth(\ell_j/2) d\ell_j \quad (\tau_i = \theta_i \ell_i).$$

Cette forme volume ne dépend pas de la décomposition \mathcal{P} , en particulier elle est invariante par le groupe modulaire. Cependant elle n'est bien définie qu'au signe près, puisque les coefficients de twist θ_i dépendent du choix d'une orientation au voisinage de γ_i , et l'ordre des $d\ell_j$ n'est pas canonique. Le plus simple consiste à considérer la mesure positive donnée par la valeur absolue de la forme volume, en éludant le problème venant de l'orientabilité.

En utilisant une généralisation de l'identité de McShane, P. Norbury a montré que le volume de l'espace des modules de la bouteille de Klein à un bord est infini. Les domaines fondamentaux déterminés précédemment permettent un calcul direct, montrant que les espaces des modules des surfaces non orientables de caractéristique -1 sont tous de volume infini. Par exemple, le volume de l'espace des modules de la somme connexe de trois plans projectifs est $\int_0^{+\infty} (b^2/48 + \pi^2/12) \coth(b/4) db$, et le volume de l'espace des modules des plans projectifs avec deux bords de longueurs b_1 et b_2 est $\int_0^A \coth(\ell_\gamma/2) d\ell_\gamma = 2[\log(\sinh(\ell_\gamma/2))]_0^A$ avec $\cosh(A) = \cosh(b_1/2) + \cosh(b_2/2) + 1$.

12. Croissance des géodésiques

Ses résultats sur le volume des espaces de modules ont permis à M. Mirzakhani de déterminer la croissance des géodésiques fermées simples ([Mir08]) : *soit X une surface hyperbolique orientable de volume fini (éventuellement avec des pointes ou des bords), et soit d la dimension de l'espace de Teichmüller associé (avec longueur des*

bords fixées), alors le nombre de géodésiques fermées simples de X de longueur au plus L est asymptotiquement équivalent à $c_X L^d$ avec $c_X > 0$.

La classification des géodésiques fermées simples établie au § 2.2 nous permet de dresser le tableau 19. Pour chaque type topologique de courbes fermées simples, on donne la croissance des géodésiques de ce type. La deuxième colonne indique l'orientabilité de la courbe ainsi que la signature du complémentaire dans la surface. La troisième colonne indique le nombre de géodésiques d'un type fixé de longueur inférieure ou égale à $L > 0$ (suffisamment grand). La constante c_X dépend de la structure hyperbolique X sur Σ , mais il s'agit bien de la même constante dans les deux lignes du tableau.

Surface	Type	Croissance
\mathbb{P}	– (+, 0, 3)	2
\mathbb{K}	+ (+, 0, 3)	1
	– (–, 1, 2)	$2L/\ell_1 + O(1)$
Σ	– (+, 1, 1)	1
	– (–, 2, 1)	$c_X L^2 + o(L^2)$
	+ (–, 1, 2)	$c_X L^2 + o(L^2)$

FIGURE 19. Croissance des géodésiques simples

Dans le cas de Σ , on détermine la croissance des géodésiques grâce aux résultats connus sur les tores à un bord et à la relation de dualité. Dans le cas de la bouteille de Klein à un bord, en travaillant avec la figure 14, on montre le fait suivant : Soit \mathbb{K} une bouteille de Klein hyperbolique avec un bord de longueur $b > 0$. Soit γ_1 la géodésique orientable de \mathbb{K} , et soit $\{\delta_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ la famille des géodésiques non orientables de \mathbb{K} . Alors

$$\{\sinh(\ell_{\delta_n}/2) ; n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \frac{\cosh(b/4)}{\sinh(\ell_1/2)} \cosh\left(\frac{(n + \theta_1)}{2} \ell_1\right) ; n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Ceci permet de déterminer facilement la croissance des géodésiques non orientables.

On voit que l'exposant dans la croissance des géodésiques ne correspond plus à la dimension de l'espace de Teichmüller. On voit aussi que l'exposant dépend du type de la géodésique, contrairement au cas orientable.

D'un côté ceci nous surprend, car la croissance des multicourbes entières (points rationnels de l'espace des laminations géodésiques mesurées) reste de la forme L^d avec d la dimension de l'espace de Teichmüller. D'un autre côté ceci reflète logiquement les phénomènes pathologiques apparaissant dans l'étude des surfaces non orientables : il n'y a plus de forme symplectique naturelle, le volume des espaces de modules est infini, l'action du groupe modulaire sur le bord de Thurston n'est plus minimale (M. Scharlemann [Sch82]).

13. Preuves alternatives de l'inégalité systolique

Dans le cas de la surface fermée de caractéristique -1 , la systole sys et la systole des géodésiques non orientables sys^- ont même maximum sur l'espace de Teichmüller (proposition 9.2). Ce phénomène très particulier n'a aucune raison de se reproduire. Par exemple, dans le cas des surfaces compactes non orientables de genre pair, la fonction sys^- n'est pas bornée supérieurement sur l'espace de Teichmüller (il suffit de pincer une géodésique orientable dont le complémentaire est orientable).

Pour prouver l'inégalité systolique (théorème 7.7) sans passer par l'étude des classes minimales, il suffit de montrer que toute surface $_{-1} X$ vérifie $\text{sys}^-(X) \leq \text{sys}^-(X_H)$. L'inégalité systolique s'ensuit directement puisque $\text{sys} \leq \text{sys}^-$ et $\text{sys}(X_H) = \text{sys}^-(X_H)$. Ceci nous permet de donner deux preuves alternatives de l'inégalité systolique.

La première preuve m'a été indiquée par Christophe Bavard en janvier 2005. La deuxième a été trouvée par Hugo Parlier en août 2005, après avoir pris connaissance de ma prépublication sur le serveur arXiv. Je les remercie tous les deux. Nous verrons dans [Gen] une preuve plus directe.

13.1. La méthode du collier. — La largeur r du plus grand voisinage collier de l'ovale γ_X satisfait l'inégalité $2 \sinh(r) \sinh(\gamma_X/6) \leq 1$ (C. Bavard [Bav05a]). Mais la largeur du collier correspond à la demi-longueur du plus court segment géodésique orthogonal à γ_X en ses extrémités. Ce segment géodésique étant unique dans sa classe d'homotopie libre relative au bord, il est stable par l'involution hyperelliptique, et s'identifie à une géodésique non orientable de X (voir § 2.2). Ainsi $r \geq \text{sys}^-(X)/2$ et

$$2 \sinh(\text{sys}^-(X)/2) \sinh(\text{sys}^-(X)/6) \leq 1.$$

Nous retrouvons l'identité qui nous a permis de calculer la systole de X_H (voir § 3). Le résultat de Bavard donne non seulement l'inégalité optimale, mais aussi la surface réalisant le cas d'égalité.

13.2. Via le revêtement orientable. — Soit $\sigma : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ l'involution négative du revêtement orientable \hat{X} de X . Tout segment géodésique de \hat{X} reliant un point p à son image $\sigma(p)$ se projette sur un lacet géodésique non orientable de X (nécessairement non trivial en homotopie). Réciproquement, tout lacet géodésique non orientable se relève en un segment reliant deux points échangés par σ . Ainsi, $\text{sys}^-(X)$ s'identifie à la distance de translation de σ :

$$\text{sys}^-(X) = \min_{p \in \hat{X}} d_{\hat{X}}(p, \sigma(p)).$$

Une borne optimale sur la distance de translation des involutions négative sans point fixe a été obtenue par H. Parlier dans [Par08]. Cette borne donne directement $\text{sys}^-(X) \leq \text{sys}^-(X_H)$. On trouve également une description du cas d'égalité dans le même article.

14. Surface de Bolza et revêtement orientable

Nous appelons *surface de Bolza* la surface hyperbolique fermée orientable de genre 2 ayant le plus gros groupe d'isométries, il s'agit aussi de l'unique surface réalisant le maximum global de la systole. Cette surface n'est bien définie qu'à isométrie près. Pour décrire la surface de Bolza, nous pouvons simplement décrire son quotient par l'involution hyperelliptique : il consiste en un octaèdre régulier formé de 8 triangles hyperboliques équilatéraux d'angle au sommet $\pi/4$ (voir [Bav92]).

Proposition 14.1. — *La surface de Bolza n'est pas le revêtement orientable d'une surface hyperbolique fermée de caractéristique -1 .*

Démonstration. — Vu le diagramme commutatif du § 1, la surface de Bolza est le revêtement orientable d'une surface $_{-1}$ si et seulement si l'octaèdre régulier admet une réflexion dont le quotient est un disque à bord géodésique contenant trois singularités coniques d'angle π dans son intérieur. L'axe de la symétrie doit éviter les singularités, sans quoi la réflexion ne se relève pas en une isométrie de la surface de genre 2. Or, toutes les réflexions de l'octaèdre régulier fixent des sommets, de sorte qu'aucune ne satisfait la propriété précédente. \square

Références

- [AG71] N. L. ALLING & N. GREENLEAF – *Foundations of the theory of Klein surfaces*, vol. 219, Springer-Verlag, 1971, Lecture Notes in Mathematics.
- [Akr03] H. AKROUT – « Singularités topologiques des systoles généralisées », *Topology* **42** (2003), no. 2, p. 291–308.
- [Bav92] C. BAVARD – « La systole des surfaces hyperelliptiques », Prépublication de l'ENS Lyon, Juillet 1992.
- [Bav97] ———, « Systole et invariant d'Hermite », *J. Reine Angew. Math.* **482** (1997), p. 93–120.
- [Bav05a] ———, « Anneaux extrémaux dans les surfaces de Riemann », *Manuscripta Math.* **117** (2005), no. 3, p. 265–271.
- [Bav05b] ———, « Théorie de Voronoï géométrique. Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues », *Bull. Soc. Math. France* **133** (2005), no. 2, p. 205–257.
- [BBFS09] M. BESTVINA, K. BROMBERG, K. FUJIWARA & J. SOUTO – « Shearing coordinates and convexity of length functions on Teichmüller space », (2009), Prépublication disponible sur le serveur Arxiv.
- [BBGM89] E. BUJALANCE, J. A. BUJALANCE, G. GROMADZKI & E. MARTINEZ – « The groups of automorphisms of nonorientable hyperelliptic Klein surfaces without boundary », in *Groups—Korea 1988 (Pusan, 1988)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1398, Springer, 1989, p. 43–51.
- [BC72] J. S. BIRMAN & D. R. J. CHILLINGWORTH – « On the homeotopy group of a non-orientable surface », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **71** (1972), p. 437–448.

- [BC04] ———, « Erratum : “On the homeotopy group of a non-orientable surface” [Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 437–448 ; mr 0300288] », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **136** (2004), no. 2, p. 441.
- [BCNS92] E. BUJALANCE, A. F. COSTA, S. M. NATANZON & D. SINGERMAN – « Involutions of compact Klein surfaces », *Math. Z.* **211** (1992), no. 3, p. 461–478.
- [BEG85] E. BUJALANCE, J. J. ETAYO & J. M. GAMBOA – « Hyperelliptic Klein surfaces », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **36** (1985), no. 142, p. 141–157.
- [BEGG90] E. BUJALANCE, J. J. ETAYO, J. M. GAMBOA & G. GROMADZKI – *Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1439, Springer-Verlag, 1990.
- [BS88] P. BUSER & K.-D. SEMMLER – « The geometry and spectrum of the one-holed torus », *Comment. Math. Helv.* **63** (1988), no. 2, p. 259–274.
- [Buj89] J. A. BUJALANCE – « Hyperelliptic compact nonorientable Klein surfaces without boundary », *Kodai Math. J.* **12** (1989), no. 1, p. 1–8.
- [Bus92] P. BUSER – *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progress in Mathematics, vol. 106, Birkhäuser, 1992.
- [Cha50] C. CHABAUTY – « Limite d’ensembles et géométrie des nombres », *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), p. 143–151.
- [Chi69] D. R. J. CHILLINGWORTH – « A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **65** (1969), p. 409–430.
- [EE69] C. J. EARLE & J. EELLS – « A fibre bundle description of Teichmüller theory », *J. Differential Geometry* **3** (1969), p. 19–43.
- [ES70] C. J. EARLE & A. SCHATZ – « Teichmüller theory for surfaces with boundary », *J. Differential Geometry* **4** (1970), p. 169–185.
- [FM12] B. FARB & D. MARGALIT – *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, vol. 49, Princeton University Press, 2012.
- [Gen] M. GENDULPHE – « Surfaces hyperboliques extrêmes en caractéristique -2 », En préparation.
- [Gen06] ———, « Paysage systolique des surfaces hyperboliques compactes de petit genre », Thèse, Université Bordeaux 1, 2006.
- [HS89] A. HAAS & P. SUSSKIND – « The geometry of the hyperelliptic involution in genus two », *Proc. Amer. Math. Soc.* **105** (1989), no. 1, p. 159–165.
- [IT92] Y. IMAYOSHI & M. TANIGUCHI – *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer-Verlag, 1992.
- [Kor02] M. KORKMAZ – « Mapping class groups of nonorientable surfaces », *Geom. Dedicata* **89** (2002), p. 109–133.
- [Lic63] W. B. R. LICKORISH – « Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **59** (1963), p. 307–317.
- [Mir07] M. MIRZAKHANI – « Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces », *Invent. Math.* **167** (2007), no. 1, p. 179–222.
- [Mir08] ———, « Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces », *Ann. of Math. (2)* **168** (2008), no. 1, p. 97–125.
- [Mum71] D. MUMFORD – « A remark on Mahler’s compactness theorem », *Proc. Amer. Math. Soc.* **28** (1971), p. 289–294.
- [MW02] H. MASUR & M. WOLF – « The Weil-Petersson isometry group », *Geom. Dedicata* **93** (2002), p. 177–190.

- [Nor08] P. NORBURY – « Lengths of geodesics on non-orientable hyperbolic surfaces », *Geom. Dedicata* **134** (2008), p. 153–176.
- [Par08] H. PARLIER – « Fixed point free involutions on Riemann surfaces », *Israel J. Math.* **166** (2008), p. 297–311.
- [Rey89] E. REYSSAT – *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progress in Mathematics, vol. 77, Birkhäuser, 1989.
- [Sch82] M. SCHARLEMANN – « The complex of curves on nonorientable surfaces », *J. London Math. Soc.* **25** (1982), no. 1, p. 171–184.
- [Sch93] P. SCHMUTZ – « Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length », *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), no. 6, p. 564–631.
- [Sze04] B. SZEPIETOWSKI – « Involutions in mapping class groups of non-orientable surfaces », *Collect. Math.* **55** (2004), no. 3, p. 253–260.
- [Thu] W. P. THURSTON – *The geometry and topology of three manifolds*.
- [Wol87] S. A. WOLPERT – « Geodesic length functions and the Nielsen problem », *J. Differential Geom.* **25** (1987), no. 2, p. 275–296.