Analisi Matematica 1 – Foglio 8 (Soluzioni) – Lunedì 12 dicembre

Esercizio 1.

1. $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ in 0,
2. $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$ in 0,
3. $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^4)$ in 0.
4. $\ln(\cos^2(x)) = -x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ in 0,

Esercizio 2.

1. $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ in 1,
2. $e^{\sqrt{x}} = e + \frac{e}{2}(x-1) + o((x-1)^2)$.

Esercizio 3.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x^x} + \frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

1. $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ in 0.
2. La retta d'equazione $y = ax + b$ è tangente al grafico di f in $(0, f(0))$ se e solo se

   $$f(x) - (ax+b) = o(x) \quad \text{in } 0.$$

   Quindi l'equazione della retta tangente è data dal polinomio di Taylor di grado 1, cioè $y = \frac{x}{2} + 1$. Abbiamo $f(x) - (\frac{x}{2} + 1) = \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ e il grafico di f è sopra la retta tangente all'intorno di 0.
3. Abbiamo $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quindi la retta d'equazione $y = x + \frac{1}{2}$ è asintotica al grafico di f in $+\infty$. Il grafico è sopra la retta asintotica all'intorno di $+\infty$.

Esercizio 5.

1. $\dfrac{1}{2}$ 2. $\dfrac{\pi}{4}$ 3. $\dfrac{\pi}{6}$ 4. π 5. $2\ln 2 - 1$ 6. $\sqrt{2} - 1$