Analisi Matematica 1 – Foglio 9 – Lunedì 19 dicembre

Esercizio 1.
Calcolare gli integrali

$$1.\ \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t, \qquad 2.\ \int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t, \qquad 3.\ \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

Esercizio 2.

1. Mostrare che $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t \ = \ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t \ = \ \frac{\pi}{4}$,
2. Ne dedurre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Esercizio 3.
Calcolare

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\ \mathrm{d}t.$$

Esercizio 4.
Calcolare per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

Esercizio 5.
Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri :

$$1.\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}, \qquad 2.\ \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t, \qquad 3.\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$

$$4.\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\ \mathrm{d}t, \qquad 5.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t, \qquad 6.\ \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t$$

Esercizio 6.
Poniamo per ogni $n \geq 1$:

$$S_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Mostrare che per ogni $n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Ne dedurre il limite della successione $(S_n)_n$.
3. Poniamo $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ per ogni $n \geq 1$. Mostrare che $(u_n)_n$ converge.
4. Provare che $S_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ quando n tende a $+\infty$.
5. Ottenere la stessa formula $S_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ usando integrali.

Esercizio 7.
Poniamo per ogni $n \geq 1$:

$$S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Usando integrali mostrare
$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n \quad (\forall n \geq 1),$$
e ne dedurre
$$S_n = \ln n + o(\ln n)$$
quando n tende a $+\infty$.
2. Sia
$$u_n = S_n - \ln n \quad (\forall n \geq 1).$$
Mostrare che $(u_n)_n$ è decrescente e converge a un limite che si chiama la *costante* γ *di Eulero*.

Soluzione esercizio 1 : 1. $\pi/4$ 2. $\pi/16$ 3. $2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$.

Soluzione esercizio 2 : 2. $\pi/4$.

Soluzione esercizio 3 : $\ln 2 - 2 + \pi/2$.

Soluzione esercizio 4 : $I_n = n!$.

Soluzione esercizio 5 : 1. diverge 2. converge 3. converge 4. converge 5. converge 6. converge.

Soluzione esercizio 7 : 1. Siccome la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ è decrescente su $]0, +\infty[$ abbiamo

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x} \;\geq\; \frac{1}{k} \;\geq\; \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (\forall k \geq 2).$$

Questo vale anche per $k = 1$ ma in questo caso l'integrale di sinistra diverge.
Facendo la somme troviamo :

$$S_n \;\geq\; \int_{1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \;=\; \ln(n+1) \quad (\forall n \geq 1),$$

e

$$S_n \;=\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \;\leq\; 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 1 + \ln(n) \quad (\forall n \geq 1).$$

Quindi

$$\ln(n+1) \;\leq\; S_n \;\leq\; 1 + \ln(n) \quad (\forall n \geq 1).$$

Notiamo che

$$\ln(n+1) \;=\; \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \;=\; \ln(n) + o(1) \quad \text{quando } n \to +\infty,$$

e concludiamo che $S_n = \ln(n) + o(\ln(n))$ quando n tende a $+\infty$.

2. La successione è limitata dal basso

$$u_n \ = \ S_n - \ln(n) \ \geq \ \ln(n+1) - \ln(n) \ \geq \ 0 \quad (\forall n \geq 1),$$

ed è decrescente :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - (\ln(n+1) - \ln(n)), \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza viene dalla decrescenza di $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Concludiamo che $(u_n)_n$ è convergente.