Analisi Matematica 1 – Foglio 7 – Lunedì 21 novembre

Esercizio 1.
Sia $a > 0$, e sia $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$f(0) = f(a) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0.$$

1. Mostrare che la derivata di $x \mapsto f(x)/x$ si annula in un punto $c \in]0, a[$.
2. Mostrare che la tangente al grafico di f in $(c, f(c))$ passa per l'origine.

Soluzione. 1. Sia $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ se } x \in]0, a] \quad \text{e} \quad g(0) = 0.$$

Questa funzione e derivabile su $]0, a]$ e continua su $[0, a]$ visto che

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0.$$

Notiamo che $g(0) = g(a) = 0$. Secondo il teorema di Rolle esiste $c \in]0, a[$ tale che $f'(c) = 0$.
2. L'equazione della tangente al grafico di f in $(c, f(c))$ è

$$y = f'(c)\ x + (f(c) - cf'(c)).$$

La derivata di g è data da

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \quad \forall x \in]0, a].$$

Quindi $g'(c) = 0$ è equivalente a $cf'(c) - f(c) = 0$. Troviamo che l'equazione della tangente è

$$y = f'(c)\ x.$$

Si vede che la tangente passa per l'origine.
Nota : la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ da il coefficiente angolare della retta che passa tra l'origine e $(x, f(x))$.

Esercizio 2. (Regola di de L'Hôpital)
Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

1. Mostrare che $g(a) \neq g(b)$.
2. Mostrare che esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Soluzione. 1. Supponiamo che $g(a) = g(b)$, allora secondo il teorema di Rolle esiste $c \in]a, b[$ tale che $g'(c) = 0$, contraddizione. Quindi $g(a) \neq g(b)$.
2. Sia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$h(x) = (f(b) - f(a))\ g(x) - (g(b) - g(a))\ f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Questa funzione è derivabile su $[a, b]$ e $h(a) = h(b) = 0$. Secondo il teorema di Rolle esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$h'(c) = 0,$$

cioè

$$\begin{aligned} (f(b) - f(a))\ g'(c) - (g(b) - g(a))\ f'(c) &= 0, \\ (f(b) - f(a))\ g'(c) &= (g(b) - g(a))\ f'(c), \\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Lo scopo dell'esercizio è quello di stabilire i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{\beta x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\beta x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha.$$

Supponiamo $\beta > 0$, e consideriamo la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x^\alpha e^{\frac{\beta}{2} x} \quad \forall x > 0.$$

1. Mostrare che esiste $A > 0$ tale che f sia crescente su $[A, +\infty[$.
2. Mostrare che $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{\beta x} = +\infty$ usando 1.
3. Concludere.

Esercizio 4. Discutere il comportamento delle seguenti serie e calcolarne la somma.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \quad \sum_{n\geq 0} (\ln \alpha)^n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+\alpha)^n} \quad (\alpha > 0).$$

Esercizio 5. Verificare che le seguenti serie non convergono :

$$\sum_{n\geq 0} n^n e^{-n}, \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^2 - n}{2n^2 + 1}, \quad \sum_{n\geq 0} \sin n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$