Analisi Matematica 1 – Foglio 6 – Lunedì 14 novembre

Esercizio 1.
Determinare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{4x}$.

Esercizio 2.
Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, 4]$.

Esercizio 3.
Determinare i punti della curva d'equazione $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ in cui la retta tangente è orizzontale.

Esercizio 4.
Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f_\lambda(x) = \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1. Mostrare che le rette tangenti ai grafici delle funzioni f_λ in $x = 0$ sono parallele.
2. Mostrare che le rette tangenti ai grafici delle funzioni f_λ in $x = 1$ sono concorrenti.

Esercizio 5.
Calcolare la n–esima derivata della funzione $f(x) = xe^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 6.
Per le seguenti funzioni determinare il dominio di esistenza della derivata e la calcolare.

$$x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}, \quad x \mapsto x^x, \quad x \mapsto \ln|x|, \quad x \mapsto \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2.$$

Esercizio 7.
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva su un intervallo aperto I.
Consideriamo un punto $a \in I$ tale che f sia derivabile in a con $f'(a) \neq 0$.

1. Mostrare che f^{-1} è continua in $f(a)$. (Potete ammettere questo se è troppo difficile)
2. Mostrare che f^{-1} è derivabile in $f(a)$ e stabilire la formula
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$
3. Calcolare la derivata della funzione $\arctan : \mathbb{R} \to]0, \frac{\pi}{2}[$.

Soluzione : 1. Vogliamo mostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$|y - f(a)| \leq \eta \Longrightarrow |f^{-1}(y) - a| \leq \epsilon.$$

Notiamo che l'implicazione sopra è equivalente a

$$y \in [f(a) - \eta, f(a) + \eta] \Longrightarrow y \in f([a - \epsilon, a + \epsilon]),$$

ma questa implicazione è ovviamente equivalente a

$$[f(a) - \eta, f(a) + \eta] \subset f([a - \epsilon, a + \epsilon]).$$

Quindi dobbiamo mostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$[f(a) - \eta, f(a) + \eta] \subset f([a - \epsilon, a + \epsilon]).$$

Fissiamo $\epsilon > 0$. Visto che f è continua l'immagine $f([a - \epsilon, a + \epsilon])$ è un intervallo contenendo $f(a)$. Inoltre $f(a)$ non è un estremo di questo intervallo, altrimenti $f(a)$ sarebbe un estremo relativo di f e avremmo $f'(a) = 0$ (principio di Fermat). Concludiamo che esiste $\eta > 0$ tale che

$$[f(a) - \eta, f(a) + \eta] \subset f([a - \epsilon, a + \epsilon]).$$

2. Vogliamo mostrare che

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Chiaramente

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)}.$$

Poniamo $x = f^{-1}(y)$, allora $y = f(x)$ e

$$\frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

Finalmente troviamo

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

L'uguaglianza tra i due limiti viene dal fatto che $x \to a$ quando $y \to f(a)$ (continuità di f^{-1} in $f(a)$).

3. Dalla formula del 2. viene

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \qquad \Big(\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\Big)$$

Si deduce

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \qquad (\forall y \in \mathbb{R}).$$