Analisi Matematica 1 – Foglio 5 – Lunedì 7 novembre

Esercizio 1.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = e^x - 2x^2 - \frac{1}{2}$.
Mostrare che f si annulla sugli intervalli $]-1, 0[$, $]0, 2]$ e $]2, 3[$.

Esercizio 2.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{-\infty} f = -1$ e $\lim_{+\infty} f = +1$.
Mostrare che f si annula in almeno un punto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.
Sia $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio a coefficienti reali di grado n dispari.
Mostrare che f si annulla in almeno un punto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.
Sia $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Mostrare che f fissa un punto di $[0, 1]$.

Esercizio 5.
Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervallo) due funzioni continue tali che

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| = |g(x)| \neq 0.$$

Mostrare che $f = g$ o $f = -g$.

Esercizio 6.
Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $p, q \in \mathbb{R}_+$. Mostrare che esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c).$$

Esercizio 7.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funziona continua e periodica. Mostrare che f è limitata.

Soluzione : Sia $T > 0$ tale che

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Allora abbiamo

$$f([nT, (n + 1)T]) = f([0, T]) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Della decomposizione

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [nT, (n + 1)T],$$

si deduce

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f([nT, (n + 1)T]), \\ f(\mathbb{R}) &= f([0, T]). \end{aligned}$$

Siccome f è continua l'immagine $f([0, T])$ è un intervallo chiuso e limitato. Quindi $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$ è un intervallo chiuso e limitato, dunque f è limitata.

Esercizio 8.
Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Mostrare che $f \circ g$ e $g \circ f$ sono limitate.

Soluzione : Visto che f è limitata, esiste $A > 0$ tale che

$$f(\mathbb{R}) \subset [-A, A].$$

Allora abbiamo

$$(f \circ g)(\mathbb{R}) = f(g(\mathbb{R})) \subset f(\mathbb{R}) \subset [-A, A].$$

cioè $f \circ g$ è limitata. Da un'altra parte

$$(g \circ f)(\mathbb{R}) = g(f(\mathbb{R})) \subset g([-A, A]),$$

e $g([-A, A])$ è un intervallo chiuso e limitato poiché g è continua su $[-A, A]$. Si conclude che $g \circ f$ è limitata.

Esercizio 9.
Studiare la successione $(u_n)_n$ definita da $u_0 \geq 1$ e $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione : Introduciamo la funzione $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ definita da

$$f(x) = 1 + \ln x \quad \forall x \geq 1.$$

Si vede facilmente che

$$f(x) \quad < \quad x \quad \forall x > 1. \tag{1}$$

Infatti $f(1) = 1$ e la funzione $x \mapsto f(x) - x$ è strettamente decrescente su $]1, +\infty[$ visto che la sua derivata

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) - x = \frac{1}{x} - 1$$

è negativa sur $]1, +\infty[$.

Viene di (1) che la successione $(u_n)_n$ è decrescente e limitata, dunque converge verso un limite $\ell \geq 1$. Prendendo il limite a sinistra e a destra dell'equazione $u_{n+1} = f(u_n)$ otteniamo

$$\ell = f(\ell),$$

dato che f è continua. L'unica soluzione di questa equazione è $\ell = 1$, dunque il limite di $(u_n)_n$ è 1.

Esercizio 10.
Determinare il limite della successione $(u_n)_n$ definita da $u_0 > 0$ e $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione : Siano $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ le funzioni definite da

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{e} \quad g(x) = f(x) - x \quad (\forall x \geq 0).$$

Queste funzioni sono continue e derivabili, più precisamente

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0 \quad (\forall x \geq 0).$$

Viene che g è strettamente decrescente su $\mathbb{R}_+$ e soddisfa $g(0) = 0$. Quindi $g(x) < 0$ per ogni $x > 0$, cioè

$$f(x) < x \quad (\forall x > 0).$$

Questo implica che $(u_n)_n$ è decrescente, dunque convergente poichè $u_n \geq 0$. Sia ℓ il limite di $(u_n)_n$, per continuita di f abbiamo

$$\ell \geq 0 \quad \text{e} \quad f(\ell) = \ell.$$

Questa equazione ha 0 come unica soluzione, concludiamo che $\ell = 0$.

Esercizio 11. Determinare i seguenti limiti :

1.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!}$$

2.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2n}}{(2^n)!}$$

Soluzione : 1. Abbiamo

$$\frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!} = \frac{n!}{1} \cdot \frac{n!}{2} \cdots \frac{n!}{2^n}.$$

Usando il fatto che $4 = 2 \cdot 2$ viene

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdots 2 = 2^n$$

per ogni $n \geq 4$. Dunque

$$\frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!} \geq \frac{2^n}{1} \cdot \frac{2^n}{2} \cdots \frac{2^n}{2^n} = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdots 2 \cdot 1 \geq 2^n$$

per ogni $n \geq 4$. Si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!} = +\infty.$$

2. Nel prodotto $(n!)^{2n}$ ci sono $2n^2$ fattori. Per n abbastanza grande abbiamo $2^n \geq 2n^2$ e

$$\begin{aligned}
(2^n)! &= \left(\prod_{k=0}^{2n-1} [(kn+1) \cdots (kn+n)] \right) \cdot (2n^2+1) \cdot (2n^2+2) \cdots 2^n, \\
&\geq (n!)^{2n} \cdot (2n^2+1) \cdot (2n^2+2) \cdots 2^n, \\
&\geq (n!)^{2n} \cdot 2^n.
\end{aligned}$$

Si conclude che

$$\frac{1}{2^n} \geq \frac{(n!)^{2n}}{(2^n)!} \geq 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2n}}{(2^n)!} = 0.$$