Analisi Matematica 1 – Foglio 4 – Lunedì 24 ottobre

Esercizio 1.
Calcolare i seguenti limiti :

1. $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$,
3. $\lim_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$,
4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, (Traccia : utilizzare l'identità $(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \ \forall a,b\in\mathbb{R}$)

Esercizio 2.
Disegnare il grafico e studiare i punti di discontinuita della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=\lfloor \sin x\rfloor$.
Indichiamo con $\lfloor y\rfloor$ la *parte intera* di un numero reale y, cioè $\lfloor y\rfloor$ è il più grande numero intero inferiore o uguale a y : $\lfloor y\rfloor = \sup(n\in\mathbb{Z}\ ;\ n\leq y)$.

Esercizio 3.
Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\geq 1 \\ \\ -x+k & x<1 \end{cases},$$

sia continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.
Determinare il dominio e studiare la continuità della funzione data da $f(x)=\frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{3-\sin x}}$.

Esercizio 5.
Siano $f,g : I\to\mathbb{R}$ due funzioni continue su un intervallo I.
Mostrare che $\sup(f,g)$ è una funzione continua su I.

Soluzione
Fissiamo $x_0\in I$ e mostriamo che $\sup(f,g)$ è continua in x_0. Per simplificare, supponiamo che

$$\sup(f(x_0),g(x_0))=f(x_0).$$

Sia $\epsilon>0$. Siccome f e g sono continue esiste $\eta>0$ tale che per ogni $x\in I$

$$|x-x_0|<\eta \Longrightarrow \begin{cases} |f(x)-f(x_0)|<\epsilon \\ \text{e} \\ |g(x)-g(x_0)|<\epsilon \end{cases}.$$

Se $\sup(f(x), g(x)) = f(x)$ allora

$$|\sup(f(x), g(x)) - \sup(f(x_0), g(x_0))| = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Se $\sup(f(x), g(x)) = g(x)$ allora

$$|\sup(f(x), g(x)) - \sup(f(x_0), g(x_0))| = |g(x) - f(x_0)|,$$

ma abbiamo

$$f(x_0) - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq g(x_0) + \epsilon \leq f(x_0) + \epsilon$$

dunque

$$|g(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Questo vale per ogni $\epsilon > 0$, quindi mostra che $\sup(f, g)$ è continua in x_0.

Altra soluzione

Fissiamo $x_0 \in I$ e mostriamo che $\sup(f, g)$ è continua in x_0.

Caso 1. Supponiamo $f(x_0) > g(x_0)$, allora per continuità esiste $\eta > 0$ tale che per ogni $x \in I$

$$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow \begin{cases} |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0) - g(x_0)}{2} \\ \text{e} \\ |g(x) - g(x_0)| < \frac{f(x_0) - g(x_0)}{2} \end{cases}.$$

Questo implica che $\sup(f, g) = f$ sull'intervallo $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. Si deduce che f è continua su $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ dunque in x_0. Lo stesso argomento funziona se $g(x_0) < f(x_0)$.

Caso 2. Supponiamo $f(x_0) = g(x_0)$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che per ogni $x \in I$

$$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow \begin{cases} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ \text{e} \\ |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \end{cases}.$$

Chiaramente

$$|\sup(f(x), g(x)) - \sup(f(x_0), g(x_0))| = |f(x) - f(x_0)| \text{ o } |g(x) - g(x_0)|$$

quindi

$$|\sup(f(x), g(x)) - \sup(f(x_0), g(x_0))| < \epsilon.$$