Analisi Matematica 1 – Foglio 3 – Lunedì 17 ottobre

Esercizio 1.
Siano $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ due successioni di numeri reali che convergono rispettivamente a ℓ e ℓ' con $\ell < \ell'$. Mostrare che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $u_n < v_n$ per ogni $n \geq N$.

Esercizio 2.
Mostrare che una successione $(u_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ è convergente se e solo se è stazionaria, cioè esiste N tale che $u_n = u_N$ per ogni $n \geq N$.

Esercizio 3.
Sia $(u_n)_n$ una successione di numeri reali non nulli tale che

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Determinare il limite di $(u_n)_n$.

Soluzione
Per definizione della convergenza, esiste N tale che

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Quindi

$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\,|u_n| \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Usando questa disuguaglianza k volte troviamo

$$|u_{N+k}| \leq \frac{1}{2}\,|u_{N+k-1}| \leq \frac{1}{4}\,|u_{N+k-2}| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^k}\,|u_N| \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Si deduce (teorema del confronto)

$$\lim_{k\to+\infty} |u_{N+k}| = 0,$$

e finalmente

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{k\to+\infty} |u_{N+k}| = 0.$$

Esercizio 4.
Siano $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ due successioni di numeri reali tali che

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Provare che $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ convergono a 0.

Soluzione
Usando l'identità $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ scriviamo

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = \left(u_n + \frac{v_n}{2}\right)^2 + \frac{3v_n^2}{4}.$$

Siccome il quadrato di un numero reale è positivo viene

$$\left(u_n + \frac{v_n}{2}\right)^2 + \frac{3v_n^2}{4} \;\geq\; \frac{3v_n^2}{4} \;\geq\; 0.$$

Il membro di sinistra tende a 0 quando n va a l'infinito. Il teorema del confronto da

$$\lim_{n\to+\infty} v_n^2 = 0,$$

dunque (la funzione radice quadrato è continua)

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Per simmetria lo stesso argomento vale per $(u_n)_n$ cioè

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Esercizio 5.
Sia $a \in \mathbb{R}^*$ e sia $(u_n)_n$ la successione definita da $u_n = a^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Studiare la convergenza di $(u_n)_n$ al variare di a, e determinare il suo limite eventuale.

Esercizio 6.
Determinare il limite della successione $(u_n)_n$ definita da

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}$ per ogni $n \geq 2$,
2. $u_n = \dfrac{1-n+n^2}{1+n+n^2}$ per ogni $n \geq 0$,
3. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{5^n + (-4)^n}$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 7. Determinare (usando disuguaglianze) il limite della successione $(u_n)_n$ definita da

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ per ogni $n \geq 2$,
2. $u_n = \dfrac{n\cos(n) - n}{n^2 + (-1)^n}$ per ogni $n \geq 2$,
3. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ per ogni $n \geq 1$,
4. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$ per ogni $n \geq 1$.

Soluzione

1. Dalla disuguaglianza
$$|\sin x| \;\leq\; 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$
viene
$$|u_n| \;\leq\; \frac{1}{n} \quad (\forall n \geq 2).$$
Concludiamo col teorema del confronto che
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

2. Abbiamo (disuguaglianza triangolare)
$$|\cos(x) - 1| \;\leq\; |\cos(x)| + 1 \;\leq\; 2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$
Si deduce
$$\begin{aligned} |u_n| \;&\leq\; \frac{2n}{|n^2 + (-1)^n|}, \\ &\leq\; \frac{2n}{n^2 - 1}. \end{aligned}$$
Troviamo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n^2 - 1} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n - \frac{1}{n}} \;=\; 0.$$
Concludiamo col teorema del confronto che
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

3. Abbiamo
$$0 \;\leq\; \frac{n!}{n^n} \;=\; \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \;\leq\; \frac{1}{n}.$$
Passando al limite e applicando il teorema del confronto otteniamo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

4. Scriviamo

$$0 \ \le\ \frac{e^n}{n!} \ =\ \frac{e}{1}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{e}{3}\cdots\frac{e}{n} \ \le\ e\cdot\frac{e}{2}\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^{n-2}.$$

Da $0 < \frac{e}{3} < 1$ viene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} = 0.$$

Il teorema del confronto implica

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!} = 0.$$