Analisi Matematica 1 – Foglio 2 – Lunedì 10 ottobre

Esercizio 1. Calcolare $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

Esercizio 2. Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $k \in \mathbb{N}$

$$k\binom{n}{k} \;=\; n\binom{k-1}{n-1},$$

e ne dedurre

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \;=\; n\;2^{n-1}.$$

Esercizio 3. Provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$,

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \;=\; n\;2^{n-1},$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} \;=\; n(n+1)\;2^{n-2}.$

(Traccia : introdurre la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (1+x)^n$ e calcolare la sua derivata)

Esercizio 4. Calcolare $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+3)$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

Esercizio 5. Provare che

$$n! \;\geq 2^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Esercizio 6. Provare che

$$(1+x)^n \;\geq 1 + nx \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geq -1).$$

Esercizio 7. Sia $(F_n)_{n\geq 1}$ la successione di Fibonacci definita da

$$F_1 = F_2 = 1, \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ per ogni } n \geq 3.$$

Trovare un maggiorante di

$$\left\{ \frac{F_n}{2^n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$